平成１７年大学院博士前期課程入試問題 平成１７年２月１５日実施

数学

次の５問から４問を選択して解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 1.

V を高々２次の一変数実係数多項式 $f(x)$ 全体の作るベクトル空間とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) $B = \{x+1, x^2+x, x^2+1\}$ は V の基底であることを示せ。

(2) 微分作用素 $T = d/dx : V \to V$ は線形写像であることを示せ。

(3) B に関する T の表現行列を求めよ。

問題 2.

$\mathsf{R}, \mathsf{Q}, \mathsf{Z}$ で各々実数、有理数、整数全体の集合を表す。集合 $X_{\mathsf{R}}, X_{\mathsf{Q}}, X_{\mathsf{Z}}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} X_{\mathsf{R}} = &\ \{(x,y,z) \in \mathsf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \\ X_{\mathsf{Q}} = &\ \{(x,y,z) \in \mathsf{Q}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \\ X_{\mathsf{Z}} = &\ \{(x,y,z) \in \mathsf{Z}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \end{aligned}$$

$d(x,y) = |x-y|$ を R^3 の通常の距離関数とするとき、距離空間 (R^3, d) から誘導された位相に関してどれがコンパクトか？(証明を付けよ。) 一方、

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

の場合にはどれがコンパクトか？(証明を付けよ。)

問題 3.

以下の問いに答えよ。

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < x)$ を $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$ と定める。任意の $0 < x < n$ に対して $f_n'(x) \leq -f_n(x)$ が成り立つことから、この範囲の x に対して $f_n(x) \leq e^{-x}$ を示せ。

(2) 極座標表示で $r\sin(2\theta)(0 < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi)$ と表される関数を $u(r,\theta)$ とするとき、u は原点を含む領域での C^1 級の関数には拡張できないことを示せ。

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{0 \leq x \leq y \leq 1} x^4 \sin(\pi y^2)\, dx\, dy$ の値を求めよ。

問題 4.

単位球面 S の一部分 $S(\alpha)$ を $0 \leq u \leq \alpha, 0 \leq v \leq 2\pi$ として

$$\begin{cases} x = & \sin(u)\ \cos(v) \\ y = & \sin(u)\ \sin(v) \\ z = & \cos(u) \end{cases}$$

で定義する。次の各問いに答えよ。

(1) $S(\alpha)$ の面積が S の全面積 $|S|$ の $\frac{1}{4}$ になるような α を求めよ。

(2) $f(x, y, z) = x - y + z$ とするとき、積分

$$\int_{S(\alpha)} f\, d\sigma$$

を計算せよ。但し $d\sigma$ は球面の面積要素である。

問題 5.

P, Q, R, S を命題とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) $(P \to Q) \land (R \to S) \land (P \lor R)$ が真であれば、$Q \lor S$ は真であることを示せ。

(2) $(P \to Q) \land (R \to S) \land (\bar{Q} \lor \bar{S})$ が真であれば、$\bar{P} \lor \bar{R}$ は真であることを示せ。

ただし、ここで $P \land Q$ は「P かつ Q」、$P \lor Q$ は「P または Q」、$P \to Q$ は「P ならば Q」、$\bar{P}$ は「P でない」をあらわす。

数学 II A1-A5 のうち１問を選択し解答せよ。さらに B1 − B10 のうち２問を選択し解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 A1.

A, B を可換環、$f : A \to B$ を全射準同型とする。次の主張が正しければ証明を与え、正しくなければ反例を挙げよ。

(1) $I \subset A$ がイデアルであれば、像 $f(I)$ も B のイデアルである。

(2) $P \subset A$ が素イデアルで、$f(P) \neq B$ であれば、$f(P)$ も B の素イデアルである。

(3) $M \subset A$ が極大イデアルで、$f(M) \neq B$ であれば、$f(M)$ も B の極大イデアルである。

問題 A2.

次の各問いに答えよ。

(1) 3 次元ユークリッド空間内の $z = f(x) + g(y)$ で与えられる曲面のガウス曲率、平均曲率を求めよ。

(2) 3 次元ユークリッド空間内の $e^z \cos x = \cos y$ で与えられる曲面が極小曲面であることを証明せよ。

問題 A3.

$a(x), b(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数として、常微分方程式 $y' = a(x)y + b(x)$ を考える。次の各問いに答えよ。

(1) 一般解を求めよ。

(2) 境界条件 $y(0) = y(1)$ をみたす解が存在するための $a(x), b(x)$ に関する条件を求めよ。

(3) 以上を常微分方程式系に拡張したい。以下、簡単のため、A は 2×2 実定数行列、$B(x), Y(x)$ は 2 次元実ベクトルに値をとる連続関数とする。このとき、$Y' = AY + B(x)$ の一般解 Y を求めよ。

(4) $Y(0) = Y(1)$ をみたす上の解が存在するための $A, B(x)$ に関する条件を求めよ。

問題 A4.

次の各問いに答えよ。

(1) 任意の正数 R について

$$\iint_{|z|\leq R} z^n \, dx \, dy = 0, n = 1, 2, ...$$

を示せ。

(2) 点 z_0 の近傍で正則な関数 f について、次の等式が成立することを示せ。

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|z-z_0|\leq\delta} f(z) \, dx \, dy.$$

但し、δ は十分に小さいものとする。

(3) 領域 D で正則な関数 g の絶対値が D で最大値をとれば、関数 g は定数であることを示せ。

(4) 有界領域 D で正則な関数 h に対し、そのノルムを

$$\| h \| = (\iint_D |h(z)|^2 \, dx \, dy)^{1/2}$$

で定める。正則関数列 $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ がこのノルムに関してコーシー列であるとき、D で正則な関数 φ があって、$n \to \infty$ で $\| h_n - \varphi \| \to 0$ となることを証明せよ。

問題 A5.

X_1, X_2 をいずれも実数の小数第一位を四捨五入したときの誤差として、独立であり、かつ、それぞれ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の値を一様にとるものとする。次の各問いに答えよ。

(1) X_1 ならびに $\log |X_1|$ の期待値と分散を求めよ。

(2) $|X_1 + X_2|$ が小さな正数 ε よりも小さくなる確率を求めよ。

(3) $|X_1 X_2|$ が小さな正数 ε よりも大きくなる確率を求めよ。

(4) 上の X_1 と同じ分布をもった独立な確率変数列 $\{Y_n\}$ が与えられているものとする。このとき、n 個の実数和をとるときの累積誤差を見積もると考えられる確率変数 $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ は $n \to \infty$ においてどのような振舞いをするか論じよ。

問題 B1.

Q を有理数体、$\alpha = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$、$K = \mathsf{Q}(\alpha)$ とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) $\sqrt{5}, \sqrt{5 - \sqrt{5}} \in K$ を示せ。

(2) α の Q 上の最小多項式を求めよ。

(3) K/Q は Galois 拡大であることを示し、その Galois 群を求めよ。

問題 B2.

次の行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し、$\Lambda = {}^tA\Lambda A$ を満たす 4 次実正方行列 A 全体の集合を L とおくとき、次の各問いに答えよ。ただし、${}^tA$ は A の転置行列である。

(1) L は行列の積に関して群をなすことを示せ。

(2) $A \in L$ ならば ${}^tA \in L$ であることを示せ。

(3) $(1,1)$ 成分 a_{11} が $a_{11} \geq 1$ を満たす L の元全体の集合を M とおく。M は L の正規部分群であることを示せ。

問題 B3.

次の各問いに答えよ。

(1) 2 次元実射影空間 $\mathsf{R}\mathsf{P}^2$ は R^2 にはめ込めないことを示せ。(ヒント： $\mathsf{R}\mathsf{P}^2$ から R への連続写像には最大値が存在することを示せ。)

(2) $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $f_k : \mathsf{R}^3 - \{0\} \to \mathsf{R}^3 - \{0\}$ を $f_k(x, y, z) = (x^k, y^k, z^k)$ で定める。$\pi : \mathsf{R}^3 - \{0\} \to \mathsf{R}\mathsf{P}^2$ を自然な射影とする。このとき、$\pi \circ f_k = \bar{f}_k \circ \pi$ を満たす $\bar{f}_k : \mathsf{R}\mathsf{P}^2 \to \mathsf{R}\mathsf{P}^2$ が唯一つ存在することを示せ。

(3) $k = 0, 1, 2, 3$ に対して、$\bar{f}_k : \mathsf{R}\mathsf{P}^2 \to \mathsf{R}\mathsf{P}^2$ は微分同相写像になるかどうか調べよ。

問題 B4.

次の各問いに答えよ。

(1) Z 係数のホモロジー群の定義を述べよ。

(2) Z 係数のホモロジー群は同型になるが同相にはならないような位相空間の例を挙げよ。(証明を付けよ。)

(3) オイラー数の定義を述べよ。

(4) オイラー数は等しくなるが Z 係数のホモロジー群は同型にならないような位相空間の例を挙げよ。(証明を付けよ。)

問題 B5.

閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数全体に標準的な sup ノルム $\| \ \|$ を入れた空間 $C[0,1]$ を考える。次の各主張に証明を与えよ。

(1) $C[0,1]$ は完備な空間である。

(2) $[0,1]$ の有限個の有理数点において有理数値をとり、それらの点以外では区分的に一次関数である連続関数全体を E で表す。このとき集合 E の濃度は可算 (可付番) である。

(3) E は $C[0,1]$ で密 (dense) である。

(4) 以下、$C[0,1]$ を X とおき、その共役空間を X^* と書くことにする。通常のように X^* の元 φ のノルム $\| \varphi \|^*$ は $\sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f)|$ で定められる。このとき、X^* の任意の有界列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ には部分列 φ_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$ が存在して、任意の $f \in X$ に対して $\varphi_{n_k}(f)$ は $k \to \infty$ で収束する。

問題 B6.

$X = L^2(0,1)$ 上の作用素 T を次で定める: $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)s\,d\,s$ $(0 \leq x \leq 1)$. 以下の各問いに答えよ。

(1) 任意の複素数 λ に対して作用素 $\lambda I - T$ は X から X への一対一の写像であることを示せ。

(2) 以下では、$\lambda \neq 0$ と仮定して、$\lambda I - T$ が X から X への上への写像であることを示そう。そのために、まず任意に与えられた $g \in X$ に対して、最初は $f_1 = \frac{g}{\lambda}$ として、以下は逐次的に $f_{n+1} = \frac{1}{\lambda}(g + T\,f_n), n = 1, 2, ...$ で、関数列 $\{f_n\}$ を定める。X の 2 乗可積分ノルムを $\| \ \|$ で表すとき、定数 C があって、$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{C}{\lambda^2} \| g \| x$, $|f_3(x) - f_2(x)| \leq \frac{C}{\lambda^3} \| g \| \frac{x^3}{3}$ となることを示せ。

(3) 一般の n について $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ を上から評価する適当な式を書け。

(4) 関数項級数 $f_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ は収束して、極限を h とおくと、$(\lambda I - T)h = g$ となることを示せ。

問題 B7.

$f(x,y), g(x,y)$ は xy 平面上の単位閉円板 $\bar{D}$ を含む領域で定義された C^1 級関数とし、その円周上で $f(x,y)x + g(x,y)y > 0$ をみたすとする。

(1) ベクトル場 v を $\mathsf{v}(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ で定義すると、円周の近傍で v は単位円板 $\bar{D}$ の外向きに向かっていることを示せ。

(2) t をパラメーターとする $\mathsf{Z}(t)=(X(t),Y(t))$ について、次の常微分方程式系を考える。

$$\begin{cases} \dot{\mathsf{Z}}(t)= & \mathsf{v}(\mathsf{Z}(t)) \\ \mathsf{Z}(0)= & \mathsf{z}_0\in\bar{D}\,. \end{cases}$$

これは $t=0$ のある近傍 $(-\delta,\delta)$ で一意解 $\mathsf{Z}(t)$ を持ち、その範囲で $\|\mathsf{Z}(t)\|^2$ は t について単調増大関数である。これらを簡潔に説明せよ。

(3) $\bar{D}$ を含む領域で C^1 級の u が次の偏微分方程式をみたすとする: $f(x,y)\,u_x+g(x,y)\,u_y=-u$. このとき (2) の Z に対して、$t=0$ の近傍で $u(\mathsf{Z}(t))=u(\mathsf{z}_0)\,e^{-t}$ となることを示せ。

(4) これより、$u(z)$ の単位閉円板 $\bar{D}$ における最大値は正でありえないことを示せ。同様に最小値についても考えて、結局 $u(z)\equiv 0$ となることを導け。

問題 B8.

実数軸 R で定義された実数値関数 φ は連続で

$$\sup_{x\in\mathsf{R}}(1+x^2)|\varphi(x)|<\infty$$

とする。次の各問いに答えよ。

(1) 関数 φ は実数軸 R でルベーグ積分可能であることを示せ。

(2) 関数 f を任意の $x\in\mathsf{R}$ に対して $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+n)$ で定めれば、f は単位区間 $[0,1]$ で有界連続関数になることを示せ。

(3) f のフーリエ係数を、各整数 k に対して

$$C_k=\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi ikx}\,dx$$

とおくとき、C_k をフーリエ変換 $\hat{\varphi}$ を用いて表せ。但し、

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-2\pi i\xi x}dx$$

とする。

(4) $f\equiv 1$ となるための条件を $\hat{\varphi}$ を用いて与えよ。

問題 B9.

F_5 を位数 5 の有限体、α を F_5 の原始元とする。F_5 係数の一変数多項式 $f(X)$ で高々次数が 2 のもの全体の集合を L とする。L から 4 次元の F_5-ベクトル空間 F_5^4 への写像 $\varphi : L \to \mathsf{F}_5^4$ を

$$\varphi(f) = (f(1), f(\alpha), f(\alpha^2), f(\alpha^3))$$

で定義するとき、次の各問いに答えよ。

(1) φ は F_5-線形写像であることを示せ。

(2) φ の像が定める線形符号を C とするとき、その次元と最小距離を求めよ。

問題 B10.

以下のプログラムはいわゆる「エラトステネスのふるい」というアルゴリズムによって整数 2 から N(今は 10000 に設定) までの素数の判定を行なうプログラム核心部を Java および Pascal で書き出したものである。このアルゴリズムについてはプログラムを読むことによってどういうものか理解してほしい。ブーリアン型配列 a の添字に対応する数字が素数であれば true を、そうでなければ false を設定することで判定結果を保存する。実行時間はどちらの言語でプログラムを記述しても変わらないとする。

Java:

```
boolean a[] = new boolean [1000001] ;
int i,j ;
int N = 10000 ;
a[0]=false;
a[1]=false;
for(i=2;i<=N;i++) a[i]=true ;
for(i=2;i<=N/2;i++)
    for(j=2;j<=N/i;j++)
      a[i*j]=false ;
```

Pascal:

```
var a:array[1..1000000] ;
var i,j,N : integer ;
N := 10000 ;

a[1] :=false ;
for i:=2 to N do a[i] :=true ;
for i :=2 to N div 2 do
    for j :=2 to N div i do
        a[i*j] := false ;
```

(1) 今このプログラムをある計算機で実行させると N が 10000 で 750×10^3 単位、N が 100000 で 1000×10^3 単位の時間が費された。では N が 500000 だとどのくらいの単位の時間が消費されるだろうか。上記程度の精度の数字で示し、その根拠を示せ。

(2) 上記のプログラムは冗長な部分がある。これを正し最適化せよ。最適化した部分はオリジナルの行番号を参照してどのような改変を加えたか具体的に示せ。

(3) この変更によって 250×10^3 単位程度の時間で N がどの程度までの範囲で素数判定ができるか答え、根拠を示せ。