大学院入試問題

次の５問に解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 1.

(1) 4×4 行列で階数が 3 に等しいようなべき零行列のジョルダン標準形をすべて求めよ。

(2) $n \times n$ 行列 A について、A がべき零行列であることと、A の固有値が 0 のみであることが同値であることを証明せよ。

(3) α を複素数とせよ。$n \times n$ 行列 A について、$A - \alpha I_n$ がべき零行列であることと、A の固有値が α のみであることが同値であることを証明せよ。ただし、I_n は単位行列をあらわす。

(4) N_1, N_2 がともに $n \times n$ べき零行列であり、$N_1 N_2 = N_2 N_1$ を満たすとき、$N_1 + N_2$ もべき零行列であることを証明せよ。

(5) $n \times n$ 行列 A, B について、$N = A - B$ がべき零行列であり、かつ、$AB = BA$ を満たすとき、A の固有多項式（=特性多項式）と B の固有多項式が等しいことを証明せよ。

問題 2.

原点を中心とする半径 R の円 $D(R)$ に含まれる 点 (n, m) の集合を $E(R)$ とする。ただし、n, m は整数とする。このとき次に答えよ。

(1)
$$\iint_{D(R)} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$$
を計算せよ。

(2) 集合 $E(R)$ に属する点の個数を $\#E(R)$ とするとき
$$\lim_{R \to \infty} \frac{\#E(R)}{R^2}$$
を計算せよ。途中の推論、または式も書くことが望ましい。

(3)
$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\log R} \left(\sum_{(n,m) \in E(R)} \frac{1}{1 + n^2 + m^2} \right)$$
を計算せよ。

問題 3.

(X, d), (Y, δ) を距離空間とし、X から Y への連続写像を f とする。

(1) X がコンパクトならば、f は一様連続であることを示せ。

(2) このとき、 f による X の像 $f(X)$ は Y のコンパクト集合であることを示せ。

(3) X がコンパクトではないときには、Y がコンパクトであっても f は一様連続とは限らない。反例をあげることにより、これを示せ。

問題 4.

平面曲線 Γ を

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{\sqrt{3}} + \frac{5y^2}{6} = 1 \right\}$$

で定め、反時計回りに向きを付ける。

(1) Γ の概形を描け。

(2) $\displaystyle\oint_\Gamma ydx - xdy$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\oint_\Gamma xdx + ydy$ を求めよ。

問題 5.

P, Q, R を命題とする。$P \to Q$ が真であると仮定するとき、次の各命題が
A) 真 、B) 偽、 C) 真とも偽ともいえない
のどれであるかを真理表を用いて判定せよ。

(1) $P \to (Q \vee R)$

(2) $(P \wedge R) \to Q$

(3) $(P \vee R) \to Q$

ただし、ここで $P \wedge Q$ は「P かつ Q」、$P \vee Q$ は「P または Q」、$P \to Q$ は「P ならば Q」をあらわす。

数学 II A1-A5 のうち１問を選択し解答せよ。さらに B1 − B10 のうち２問を選択し解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 A1.

R は可換環、I,J を R の相異なるイデアルとする。次の命題が正しければ証明を与え、間違っていれば反例を与えよ。

(1) $I \cup J$ はイデアルである。

(2) $I \cap J$ はイデアルである。

(3) もし $I \cap J$ が素イデアルであれば、$I \subset J$ または $J \subset I$ が成り立つ。

問題 A2.

(1) $M = \mathsf{R}^2$, $N = \mathsf{R}^3$ とする．写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ を、

$$\varphi : M \ni (u, v) \longmapsto (u, u\sin(v), u\cos(v)) \in N$$

と定める時、写像 φ の点 $p = (u, v) \in M$ における微分 (differential) $(d\varphi)_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ を具体的に求めよ．さらに、写像 φ は、はめ込みか？埋め込みか？論ぜよ。

(2) $M = \mathsf{R}^2$ 上のベクトル場 X, Y を、

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

とする時、ベクトル場 X, Y の積分曲線を求めよ．また、ベクトル場 X, Y のブラケット積 $[X, Y]$ を計算せよ。

(3) $M = \mathsf{R}^2$ 上の 1 次微分形式 α, β を、

$$\alpha = -ydx + xdy, \quad \beta = xdx + ydy,$$

$M = \mathsf{R}^2$ 上の 2 次微分形式 θ を、

$$\theta = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

とする時、外積 $\alpha \wedge \beta$ を求めよ．また、外微分 $d\theta$ を計算せよ.

問題 A3.

関数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ($0 < x < 1$) を $f_n(x) = x^{n+1}\log\frac{1}{x}$ と定めるとき、以下の問いに答えよ。ただし、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることは証明なしに用いてよい。

(1) 任意の $0 < x < 1$ に対して次式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}\log\frac{1}{x}$$

(2) $F(x) = \frac{x}{1-x}\log\frac{1}{x}$ とするとき、$F(x)$ が閉区間 $[0, 1]$ において連続になるように $F(0), F(1)$ の値を定めよ。

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dx$ の値を求めよ。

問題 A4.

(1) 実部 x が正の複素数 $z = x + iy$ に対して、

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

が収束することを示せ。

(2) $\{z = x + iy : x > 0\}$ 上で $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\Gamma(z)$ を（２）の関係式を用いて $z = 0$ の近傍に接続すると、$z = 0$ は $\Gamma(z)$ のどのような特異点になるか詳しく述べよ。

問題 A5.

Pascal の構文に基づいて記述された以下のアルゴリズムを考える.

```
while not ((x = 0) and empty) do
    if x = 0 then
        begin x := pop; y := y+1 end
    else
        if y = 0 then
            begin x := x-1; y := 1 end
        else
            begin push(x-1); y := y-1 end;
z := y+1
```

このアルゴリズムは整数型の変数 x，y，z と共にスタックを 1 つ使用していて，push を「実引数として与えられたデータをスタックにプッシュする手続き」，pop を「スタックからデータをポップして返す関数」，empty を「スタックが空の時に TRUE そうでない時に FALSE を返す関数」

と仮定して使用している．また，非負整数 m, n に対して，スタックを空の状態にして x,y にそれぞれ m, n を与えて上のアルゴリズムを実行した時の最終的な z の値を $A(m, n)$ として部分関数 A を定義する.（特に，計算が停止しなければ z の値は未定義なので $A(m, n)$ の値も未定義となる.）これについて以下の問いに答えよ.

(1) スタックを空の状態にして x,y にそれぞれ 2,1 を与えて上のアルゴリズムを実行した時に，各変数の値とスタック状態がどのように推移するか説明して最終的な z の値を答えよ.

(2) スタックに非負整数 l が 1 つ保存されている状態で，x,y にそれぞれ非負整数 m, n を与えて上のアルゴリズムを実行した時の最終的な z の値を A を用いて表せ.

(3) A の再帰的な定義を与えよ．また A は全ての非負整数に対して値が定義されていることを証明せよ.

(4) $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ であることを証明せよ.

問題 B1.

Z を整数全体のなす環、Q を有理数全体のなす体とする。

(1) 環 $\mathsf{Z}[\sqrt{-3}]$ は整閉でないことを示し、その整閉包 R を求めよ。

(2) R を (1) の通りとするとき、多項式 $x^3 - (1 + \sqrt{-3})$ は R で既約であることを証明せよ。

(3) 体の拡大 $\mathsf{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{-3}})/\mathsf{Q}$ の拡大次数を求めよ。また、この拡大は Galois 拡大であるかどうか判定せよ (答だけでなく、理由もきちんと説明すること)。

問題 B2.

A を可換環, $A[X]$ を A 上一変数の多項式環,

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$$

とする. 次を証明せよ.

(1) f が $A[X]$ の単元 $\iff$ a_0 が A の単元で $a_1, \ldots, a_n$ は A のべき零元.

(2) f が $A[X]$ のべき零元 $\iff$ $a_0, \ldots, a_n$ は A のべき零元.

(3) f が $A[X]$ の零因子 $\iff$ ある $b \in A$ $(b \neq 0)$ があって $bf = 0$.

問題 B3.

$\gamma : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$ はパラメータ t を弧長とする正則平面曲線とする。

(1) $\gamma(t)$ の単位接ベクトル $e(t)$, 単位法ベクトル $n(t)$, 曲率 $\kappa(t)$ の定義を述べよ。

(2) 次の四つの場合に、条件を満たす正則平面曲線 $\tilde{\gamma}: \mathsf{R} \to \mathsf{R}^2$ が存在するか。（但し、$\tilde{e}(t)$ は $\tilde{\gamma}$ の単位接ベクトル、$\tilde{n}(t)$ は $\tilde{\gamma}$ の単位法ベクトル、$\tilde{\kappa}(t)$ は $\tilde{\gamma}$ の曲率、t は $\tilde{\gamma}$ の弧長である。）

a) 任意の t に対して $\tilde{e}(t) = n(t)$ かつ $\tilde{n}(t) = e(t)$ が成り立つ。

b) 任意の t に対して $\tilde{e}(t) = -n(t)$ かつ $\tilde{n}(t) = e(t)$ が成り立つ。

c) 任意の t に対して $\tilde{e}(t) = -n(t)$ かつ $\tilde{n}(t) = -e(t)$ が成り立つ。

d) 任意の t に対して $\tilde{e}(t) = n(t)$ かつ $\tilde{n}(t) = -e(t)$ が成り立つ。

(3) (2) において $\tilde{\gamma}$ が存在するとき、それぞれの場合に $\tilde{\gamma}$ の曲率 $\tilde{\kappa}$ を求めよ。

(4) 曲線 $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$ を正則平面曲線とする。(2) で存在する $\tilde{\gamma}$ の具体的な式を与えよ。また、そのとき、$T \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ を満たす線形変換 $T: \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ を求めよ。

問題 B4.

(1) 2 次元トーラス T^2 の 1 次のホモロジー群 $H_1(T^2; \mathsf{Z}) \cong \mathsf{Z}a \oplus \mathsf{Z}b$ について, サイクル c の表す元を $[c] = pa + qb$ と書くことにする. このとき次の条件は c が連結な 1 次元部分多様体で実現できるための必要十分条件であることを証明せよ；$p = q = 0$ または, ある $s, t \in \mathsf{Z}$ が存在して $ps + qt = 1$.

(2) R^2 から相異なる 3 点 $\{p, q, r\}$ を除いた空間 $\mathsf{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ の de Rham コホモロジー群を求めよ.

問題 B5.

(1) $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対し

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

を満たす $u(x)$ はただ 1 つ存在して

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y)\, dy,\ (0 \le x \le 1)$$

と表わされることを示せ. ここで,

$$G(x, y) = \begin{cases} (1 - x)y, & 0 \le y \le x \le 1 \\ x(1 - y), & 0 \le x \le y \le 1. \end{cases}$$

(2) $[0,1]$ 上の連続関数 $u(x)$ に対し

$$Tu(x) = \int_0^1 G(x,y)e^{-u(y)}\,dy,\ 0 \le x \le 1$$

によって $[0,1]$ 上の連続関数 $Tu(x)$ を定める．また $\|u\|_{max} = \max_{0\le x\le 1}|u(x)|$ とおく．このとき, $u(x) \ge 0, v(x) \ge 0\ (0 \le x \le 1)$ なる $[0,1]$ 上の 2 つの連続関数 u, v に対して

$$\|Tu - Tv\|_{max} \le \frac{1}{8}\|u - v\|_{max}$$

が成立することを示せ.

(3) $u_1(x) \ge 0\ (0 \le x \le 1)$ なる $[0,1]$ 上の連続関数 $u_1(x)$ を勝手に選んで

$$u_{n+1}(x) = (Tu_n)(x),\ (0 \le x \le 1, n = 1, 2, \cdots)$$

で $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ を作る．このとき, $u_n(x)$ は $n \to +\infty$ である連続関数 $v(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ.

(4) 非線形境界値問題

$$-v''(x) = e^{-v(x)},\ 0 < x < 1, \quad v(0) = 0,\ v(1) = 0$$

の解がただ 1 つ存在することを示せ.

問題 B6.

$$l^2 = \left\{ \{u_n\}_{n=1}^{\infty};\quad \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \text{は} \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 < \infty \text{ をみたす複素数列} \right\}$$

とおく．l^2 は内積

$$(u,v)_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\overline{v_n}, \qquad u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2, \quad v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$

に関するヒルベルト空間である．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な複素数列とする．l^2 上の線形作用素 T を次で定義する．

$$T : l^2 \ni \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{a_nu_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2.$$

T の作用素ノルムを $\|T\|$ で表す．以下の (1), (2), (3) が成り立つことを示せ.

(1)

$$\|T\| \le \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|.$$

(2)

$$T \text{ はコンパクト作用素} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow T \text{ はコンパクト作用素.}$$

問題 B7.

可積分関数 $g : \mathsf{R} \to \mathsf{R}^+$ は次の条件を満たすとする。

$\int g(x)dx = 1$、$\int xg(x)dx = 0$、$\int x^2 g(x)dx = 1$

（ただし、積分範囲は R 全体とする。以下の積分も同様。）

また、可積分関数 f に対し、$\tilde{f}(\xi) = \int e^{-i\xi x} f(x)dx$ とおく。

このとき、次の問に答えよ。

(1) $\tilde{g}(-\xi/\sqrt{n})^n$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ。

(2) $\phi \in \mathsf{S}(\mathsf{R})$（急減少関数）のとき、次を示せ。

$$\int \tilde{\phi}(\xi) e^{-\xi^2/2} d\xi = \sqrt{2\pi} \int \phi(x) e^{-x^2/2} dx$$

(3) $\phi \in \mathsf{S}(\mathsf{R})$ のとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \int \cdots \int \phi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\right) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \phi(x) dx$$

問題 B8.

２個の数字 $\{0,1\}$ からなる片側無限列の空間

$$\Omega = \{ \ \mathsf{x} = \{x_i\} = (x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in \{0,1\}, i \in \mathsf{N} \}$$

と，その上の距離　$D(\mathsf{x},\mathsf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|$　$(\mathsf{x} = \{x_i\}, \mathsf{y} = \{y_i\} \in \Omega)$ を考える．写像 $\sigma : \Omega \to \Omega$ を，$\mathsf{x} = (x_1, x_2, \cdots) \in \Omega$ に対して $\sigma((x_1, x_2, \cdots)) = (x_2, x_3, \cdots)$ で定義する．$n \in \mathsf{N}$ に対して，σ を n 回合成した写像は σ^n で表す．$N \in \mathsf{N}$ と $a_i \in \{0,1\}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を任意に固定したときに，Ω の部分集合 $[a_i]_N$ を

$$[a_i]_N = \{\mathsf{x} = \{x_i\} \in \Omega \mid x_i = a_i, \ \ 1 \le i \le N \ \}$$

で定義する．このような形で表される集合をシリンダーといい，N をシリンダーの長さという．Ω 上の確率測度 P は，任意の長さ N のシリンダー $C = [a_i]_N$ に対して，$P(C) = 2^{-N}$ を満たすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sigma : \Omega \to \Omega$ は２対１の局所同相写像であることを示せ．

(2) 長さ $N \in \mathsf{N}$ のシリンダー $C = [a_i]_N$ と長さ $M \in \mathsf{N}$ のシリンダー $C' = [b_j]_M$ と $L \geq M$ を満たす $L \in \mathsf{N}$ に対して，次が成り立つことを示せ：

$$P(\sigma^{-1}(C)) = P(C), \quad P(\sigma^{-L}(C) \cap C') = P(C) \cdot P(C').$$

(3) シリンダー $C = [a_i]_N$ を任意に固定したときに，次が成り立つことを示せ：

$$P\left(\{\mathsf{x} \in \Omega \mid \text{ある } n \in \mathsf{N} \text{ が存在して } \sigma^n(\mathsf{x}) \in C\ \}\right) = 1.$$

(4) 関数 $\varphi : \Omega \to \{0, 1\}$ を $\varphi(\mathsf{x}) = \begin{cases} 0 & (x_1 = 0) \\ 1 & (x_1 = 1) \end{cases}$ $(\mathsf{x} = \{x_i\} \in \Omega)$ で定義する．このとき，次が成り立つことを示せ：

$$P\left(\left\{\mathsf{x} \in \Omega \;\middle|\; \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(\sigma^n(\mathsf{x})) = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1.$$

問題 B9.

図 1 に示すような型の計算機の制御部の設計を行いたいと思う。制御部への入力信号 x は n ビットあり（各ビットは $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ と記し、x_0 を最下位ビットとする）計算機の他のユニットからの情報を表し、クロックパルスごとに更新されるものとする。入力が到着すると入力と次アドレス生成部からの情報が分岐回路で結合され次アドレスを決定する。そのアドレス内のデータが読み出され m ビット z（$z_0, z_1, \cdots, z_{m-1}$）の出力情報が計算機の他のユニットに送られる。図中斜線部は次アドレス生成部を ROM を用いて実現した場合必要となる回路とする。

なお図 1 の計算機は図 2 の状態遷移図により次アドレスが決定されるとする。ここに状態は s_0 から始まることに注意。またデータは次アドレス生成部が s_i を示すと出力 z_i のみ 1 となり他は 0 であるとする。結局入力 1 ビット（x_0）、出力は 4 ビット（z_0, z_1, z_2, z_3）である。上述のごとく添え字は 0 が最下位ビット、１がその次のビットを表すとする。

(1) 図 2 より x_0 値対状態の状態遷移表を書きなさい。状態は図のように $s_0, s_1, \cdots$ で表しなさい。

(2) 次アドレス生成部から y が出力される。この y について状態数から必要ビット数を考え次アドレス生成部に必要なすべてのビット（$y_0, y_1, \cdots$）の論理式を書き出しなさい。必要ビット数は次アドレス生成部の実現方法により異なる。ここではゲート回路で実現するとする。この場合図 1 の斜線部の回路は必要としない（y=d）。y_1 の回路を書き出しなさい。

(3) 次に次アドレス生成部とデータバス生成部を ROM を使って設計しようと思う。ROM の各アドレスを各状態に対応させその状態でとりうる出力のすべて（y,z）を ROM の対応するアドレスにデータとして記述しておくことができる。ただしその場合分岐回路を出力段に付けてやらなければならない。ROM の内容をすべて書き出しなさい。各状態につき次アド

レス生成部、データ生成部ともに 4 ビット必要である。

(4) さらに ROM を使う場合アドレスレジスタと ROM の間にデコーダを入れる必要がある。アドレスレジスタ内の 2 進アドレス値から ROM の対応するアドレスのデータを直接アクセスするためである。このデコーダを設計しなさい。

(5) ROM を使った場合の分岐回路を設計しなさい。

問題 B10.

各節点に大文字のアルファベットをキーとして持つ二分探索木を考える.

(1) 空の木に, 文字列 $SHUTODA$ を, 先頭の文字 S から順に文字 A まで節点に挿入すると, 次の様な二分探索木が構成される.

これに更に文字 I を挿入した二分探索木を書け.

(2) 空の木に先頭の文字から順に節点に挿入した時に, 問 (1) と同じ二分探索木が構成されない文字列は, 以下の中でどれか挙げよ.

(a) $SHUTDOA$

(b) $SHUDAOT$

(c) $SHUTADO$

(d) $SHUDATO$

(e) $SHUTDAO$

(3) 各節点にキーとして S, H, U, T, O, D, A を丁度一回ずつ持つ頂点数 7 の二分探索木で, それぞれ高さが 2 と 6 となるものを書け.

(4) 問 (1) の二分探索木を, それぞれ間順走査と後順走査した節点のキーを, その順に文字列として左から右に書け.

(5) 前順走査した節点のキーを, その順に左から右に書いた時に, 文字列として $SHUTO$ となる二分探索木は存在しない事を証明せよ.

(6) 各節点に大文字のアルファベットをキーとして持つ二分探索木から, 文字 O を探索した時に, 走査した節点のキーとして現れる可能性のない文字列は, 以下の中でどれか挙げよ.

(a) $ADUTHISO$

(b) $UATDSHIO$

(c) $UASDTHO$

(d) $AUTDGHSIO$

(e) $UAHTDSIO$