平成16年度東京都立大学大学院(理学研究科修士課程)
入学試験(2月17日(火)9:30 〜 11:30)

数学 I

次の 4 問に解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．

問題 1: 3 次単位行列を E とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に関して次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n \geq 3$ に対して $A^n - A^{n-2} = A^2 - E$ が成立することを示せ．

(2) A^{50} を求めよ．

問題 2: (1) X を距離空間, $B(X, \mathbf{R})$ を X 上の実数値有界関数全体のなす空間, $CB(X, \mathbf{R})$ を X 上の実数値有界連続関数全体のなす空間とする． $f, g \in B(X, \mathbf{R})$ に対し, 距離 $d(f, g)$ を

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

で定める．このとき, $CB(X, \mathbf{R})$ は $B(X, \mathbf{R})$ の閉部分集合となることを示せ．

(2) $\mathbf{R}^2 \supset U_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ を

$$U_n = (-\infty, n) \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x < n\}$$

で定める．$\mathbf{R}^2$ の位相 $\mathcal{O}$ を,

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbf{R}^2\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \{U_n\}$$

で定める．$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ はこの位相 $\mathcal{O}$ に関してコンパクトになることを示せ．

問題 3: $a, b, c > 0$ として, 次の 3 次元の立体の体積を求めよ.

(1) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$

(2) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} + \sqrt{\dfrac{z}{c}} \leq 1\}.$

問題 4: 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する.

(1) $B = E + A$ (E は単位行列) とするとき, 行列の指数関数 $\exp(tB) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!} B^n$ を求めよ.

(2) 行列の指数関数 $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!} A^n$ を求めよ.

(3) 線形微分方程式系の初期値問題:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

平成16年度東京都立大学大学院（理学研究科修士課程）
入学試験（2月17日（火）13：00 〜 15：30）

数学 II

$A1$-$A3$ **のうち** 1 **問を選択し解答せよ．さらに** $B1$-$B9$ **のうち** 2 **問を選択し解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．**

問題 A1: 2変数の多項式環 $R = \mathbf{Q}[X, Y]$ のイデアル $I = (X^2+X+Y, Y-X^3-2), J = (X^2+X+Y)$ を考える．

(1) J は R の極大でない素イデアルであることを示せ．

(2) I は R の極大イデアルであることを示せ．

(3) R は単項イデアル整域ではないことを示せ．

問題 A2: $\mathbf{R}^3$ の通常の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表わす．S^2 を $\{v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \langle v, v \rangle = 1\}$ により定義された2次元球面とする．1径数変換群 $\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を

$$\phi(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により定義する．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) $\phi_\theta(p) = \phi(\theta, p)$ により変換 $\phi_\theta : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を定義すると ϕ_θ は S^2 を保つことを示せ．

(2) $\alpha(\theta) = \phi_\theta(p) \quad (\theta \in \mathbf{R})$ を点 $p \in S^2$ を通る軌道とする．これを θ に関して微分することによって得られる p におけるベクトル

$$\xi_p = \left. \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

が接空間 T_pS^2 に属すること示せ．

(3) 点 $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する ξ_p を $\mathbf{R}^3$ の座標を使って求めよ．

問題 A3: $\mathbf{R}^2$ の点 $O=(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ を頂点とする正方形の内部と周からなる集合を D とする.

D の各辺を 3 等分して D を一辺の長さ $1/3$ の 9 個の正方形に分割し, 中央の正方形の内部を取り除く. 次に, 残った 8 個の正方形の各々の各辺を 3 等分して一辺の長さ $1/9$ の 9 個の正方形に分割し, 中央の正方形の内部を取り除く. この手続きを限りなく続けると, n 回目には一辺の長さ 3^{-n} の 8^{n-1} 個の正方形の内部を取り除くことになる. こうして除かれた可算個の正方形の内部の和集合を S とし, 残った集合を $C=D-S$ とする.

(1) C は $\mathbf{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

(2) 集合 C は ルベーグ可測であることを示せ.

(3) 集合 C の ルベーグ測度 $m(C)$ は 0 であることを示せ.

(4) 定数 a に対して, D 上の関数 $f(x)$ を次の (a), (b) により定義するとき, 関数 $f(x)$ が ルベーグ積分可能になるような定数 a の範囲を求めよ.

(a) $x \in C$ ならば $f(x)=0$.

(b) x が C を構成する際に除かれた一辺の長さが 3^{-n} の正方形の内部に含まれるならば, $f(x)=a^n$.

問題 B1: 3 次方程式 $P(X)=X^3+X^2+c=0$ $(c \in \mathbf{R})$ に対し, $D(c)=-c(27c+4)$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) $P(X)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $D(c)=0$ であることを示せ.

(2) $D(c) \neq 0$ とし, $P(X)=0$ の根のひとつを θ とする. また $P'(X)$ を $P(X)$ の導関数とする. このとき

$$D(c)=P'(\theta)^2(\theta+1)(1-3\theta)$$

を示せ. さらに $P(X)=0$ の他の 2 根を θ を用いて表わせ.

(3) $P(X)=0$ が相異なる 3 実根を持つための必要十分条件は $D(c)>0$ であることを示せ.

(4) 特に $c \in \mathbf{Q}$, $D(c) \neq 0$ とし, $P(X)$ は $\mathbf{Q}$ 上既約であるとする. また $P(X)=0$ の根のひとつを θ とする. このとき拡大 $\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}$ がガロア拡大であるための必要十分条件は $D(c)$ が $\mathbf{Q}$ 内で平方数であることを示せ.

問題 B2: G_1, G_2 を群, $\mathrm{Aut}\ G_1$, $\mathrm{Aut}\ G_2$ を各々その自己同型群とする. $f_1 \in \mathrm{Aut}\ G_1$, $f_2 \in \mathrm{Aut}\ G_2$ に対して直積群 $G_1 \times G_2$ の間の写像

$$f_1 \times f_2 :\ G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

を次のように定義する: $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ に対し, $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. このとき次の問いに答えよ.

(1) 対応 $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \times f_2$ は単射準同型 F: $\mathrm{Aut}\ G_1 \times\ \mathrm{Aut}\ G_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\ (G_1 \times G_2)$ を定義することを示せ.

(2) F が同型とならない G_1, G_2 の例を挙げよ.

(3) G_1 と G_2 の間に自明な準同型しか存在しないとき, F は同型になることを示せ. ただし, ここで群準同型 $f :\ G \to G'$ が自明であるとは, 任意の $x \in G$ に対して $f(x) = e'$ (G' の単位元) を満たすことである.

問題 B3: X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像,

$$f_* :\ H_k(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_k(Y; \mathbf{Z})$$

を f が誘導する $\mathbf{Z}$ 係数ホモロジー群の間の準同型とする. 次の問いに対して, それぞれ証明もしくは反例（その場合はなぜ反例になるかの証明もつけること）をつけて答えよ.

(1) f が単射なら f_* は単射か？

(2) f が全射なら f_* は全射か？

問題 B4: 半径 r の球面 $x = r\cos u \cos v, y = r\cos u \sin v, z = r\sin u$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 図を描き, r, u, v を書き込め.

(2) 第 1 基本量 (E, F, G とする), 単位法ベクトルおよび第 2 基本量 (L, M, N とする) を求め, さらに, ガウス曲率, 平均曲率を求めよ.

(3) すべて臍（せい）点（2 つの主曲率が等しい点) のみからなることを示せ.

(4) 測地線の方程式を求めよ.

(5) 測地線はすべて大円であることを示せ.

問題 B5: (1) f が閉円板 $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \le r\}$ $(r > 0)$ の上で正則ならば,

$$|f(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) (1) の不等式で等号が成立するならば, θ によらない φ が取れて

$$f(re^{i\theta}) = |f(re^{i\theta})| e^{i\varphi}$$

となることを証明せよ.

(3) (2) の等式を満たす $\overline{\Delta}$ 上の正則関数 f は定数に限ることを証明せよ.

問題 B6: (1) $\phi \in L^1(\mathbf{R}), \psi \in L^2(\mathbf{R})$ に対し,

$$(\phi * \psi)(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi(x-y)\psi(y)\, dy$$

と定義する. このとき, 不等式

$$\|\phi * \psi\|_{L^2(\mathbf{R})} \le \|\phi\|_{L^1(\mathbf{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $k_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ $(\ t > 0,\ x \in \mathbf{R})$ とおく. $f \in L^1(\mathbf{R})$ に対し

$$\|k_t * f\|_{L^2(\mathbf{R})} \le 2^{-\frac{3}{4}} \pi^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し,

$$\lim_{t \to \infty} \|k_t * g\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0$$

が成り立つことを示せ.

問題 B7: $\mathcal{H}$ を実ヒルベルト空間とする. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ の内積とし, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ のノルムとする.

(1) B を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とし, K を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト線形作用素とする. このとき, 作用素 BK, KB はともにコンパクト線形作用素であることを示せ.

(2) F は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素で, F の値域 $\mathrm{Ran}\ F$ は有限次元であるとする. $N = \dim \mathrm{Ran}\ F$ とおく. このとき, F は, あるベクトル $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N \in \mathcal{H}$ と $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N \in \mathcal{H}$ を用いて

$$Fu = \sum_{i=1}^{N} (u, \psi_i)_{\mathcal{H}} \phi_i, \quad u \in \mathcal{H}$$

と表わされることを示せ.

(3) F は (2) のとおりとする. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の列で, 0 に強収束するものとする: すなわち, 任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n u\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ は作用素ノルムとする.

問題 B8: $K = \{0, 1\}$ を 2 元体とする. k, l を正の整数で $k \le l$ であるものとする. 有限集合 S の元の個数を $\#S$ で表わす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $M = \{A \mid A$ は K に成分をもつ $k \times l$ 行列で, $\mathrm{rank}\, A = k\}$ とするとき, $\#M$ を k, l を用いて表わせ.

(2) $G = \{A \mid A$ は K に成分をもつ正則 $k \times k$ 行列 $\}$ とする. G は左からの積として, M に作用する. その軌道 (orbit) の集合を Ω とするとき, $\#\Omega$ を k, l を用いて表わせ.

(3) $I = \{(i_1, \cdots, i_k) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le l\}$ とするとき,

$$\#\Omega = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)\in I} \left(\prod_{p=1}^{k} 2^{l-k+p-i_p} \right)$$

を証明せよ.

(4) $m(k, l, s) = \#\{(i_1, \cdots, i_k) \in I \mid i_1 + \cdots + i_k = s\}$ とするとき,

$$\sum_{s=0}^{\infty} m(k, l, s) 2^s$$

を k と l で表わせ.

問題 B9: 整数 $n > 0$ に対する長さ $r \geq 0$ の加法鎖とは, 項数 $r + 1$ の数列

$$1 = a_0 < \cdots < a_r = n$$

で, 次の 2 つの条件を満たすように構成したものである:

(a) 各 $i = 1, \ldots, r$ において, 番号 $j = j(i)$, $k = k(i)$ で

$$0 \leq k(i) \leq j(i) < i \leq r, \quad a_{i-1} < a_{j(i)} + a_{k(i)}$$

となるものが存在して $a_i = a_{j(i)} + a_{k(i)}$ となっており,

(b) 各 i に対して (a) で選ぶ番号 j, k には無駄がない, すなわち

$$\{j(i),\, k(i) \mid 1 \leq i \leq r\} = \{0, \ldots, r-1\}$$

を満たす.

この加法鎖に対する構成法とは, $(j(1), \cdots, j(r)), (k(1), \cdots, k(r))$ の 2 つの組のことをいう.

このとき n と実数 x との積 nx は

$$s_i = \begin{cases} x & (i = 0), \\ s_{j(i)} + s_{k(i)} & (0 < i \leq r), \end{cases}$$

とすれば $nx = s_r$ だから, 和の計算だけで求まることになる. ただし, 同じ $s_i\,(0 \leq i < r)$ は再利用し, 再計算しないこととする.

(1) $n = 5$ に対する加法鎖を上の意味での構成法を含めてすべて列挙せよ. このとき nx を求める和の計算回数の最大値と最小値は何か.

(2) また, $n = 7$ に対する長さ $r = 4$ の加法鎖 1, 2, 3, 4, 7 のすべての構成法を列挙せよ. このとき nx を求める和の計算回数は何回か.

(3) 積 nx を上のような加法鎖を用いて計算するときに, 和の計算回数は何回か.

(4) 2 つの実数の和の計算時間を A, 積の計算時間を A^2 とする. nx を求めるのに, 通常の積の計算より加法鎖を用いる方が高速となるための条件を求めよ.

平成16年度東京都立大学大学院(理学研究科数学専攻)
修士課程入学試験(2月17日(火) 16:00 ～ 17:00)

英語

次の2問に解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．30分以降途中退室してもよい．

問題 1: 次の英文を和訳せよ.

Groups form an important tool in the study of geometrical symmetry. Many geometrical objects show symmetries of varying kinds and the natual way to classify them is by means of the groups they admit. Later we give some examples. For a fuller discussion we refer to the books by Speiser, Weyl and Coxeter.

We shall need a formula for the number of orbits in a set.

THEOREM: Let G be a finite group acting on a finite set S. For each $g \in G$ let c_g be the number of points fixed by g. Then the number of orbits is

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c_g.$$

Thus t is the "average" number of points fixed by a permutation. To prove the theorem, we count the number of pairs $(x, g) \in S \times G$ such that $xg = x$ in two ways: on the one hand, for each $g \in G$, the number of pairs occurring is c_g; on the other hand, for each orbit, of k points say, each point x is fixed by the elements of its stabilizer, which by the orbit formula has $|G|/k$ elements. Thus each orbit contributes $|G|$ pairs in all and so $\sum c_g = |G|t$, where t is the number of orbits. This completes the proof.

(抜粋　Algebra, Volume 1, by P. M. Cohn(Wiley, 1974))

問題 2: 次の文章をそれぞれ英訳せよ.

(1) 行列の理論は幅広い応用を持っている. 典型的な応用は連立一次方程式の解法であるが, 微分方程式をコンピューターを用いて解く際にも重要な役割を果たす.

(2) ベクトル空間 V においては, ベクトルの一次独立の概念が重要である. 一次独立なベクトルの組であって V を張るものを基底という. V の基底はいろいろ存在するが, 有限次元の場合, その組を構成するベクトルの個数は一定であることが証明される.