平成16年度東京都立大学大学院(理学研究科修士課程)
入学試験 (9月2日(火) 9 : 30 ～ 11 : 30)

数学 I

次の4問に解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1: 実数を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b-a & a-b \\ b-1 & 1 & -1+a \\ b-1 & -b+1 & b-1+a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) A の特性多項式を計算し, A の固有値を求めよ.

(2) A が正則かつ対角化可能となるとき, a および b が満たす条件を求めよ.

問題 2: 位相空間の列

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$$

において, 各 X_n は X_{n+1} の部分位相空間とする. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) X の部分集合 U は, 各 X_n との共通部分 $U \cap X_n$ が X_n の開集合であるとき, 開集合であると定める. このとき X は位相空間になることを示せ.

(2) 仮定より X_n は X_{n+1} の部分位相空間であるから, X_n の開集合 U_n は X_{n+1} の開集合 U_{n+1} を用いて $U_n = X_n \cap U_{n+1}$ と表わされる. このようにして帰納的に定まる X_n の開集合 U_n からなる列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を1つ考え, 各自然数 n に対して $V^n = \bigcup_{m=n}^{\infty} U_m$ とおく. 各自然数 k に対する共通部分 $X_k \cap V^n$ は, $k \geq n$ なる場合と $k < n$ なる場合でそれぞれどう表わされるか.

(3) X_n の開集合は X の開集合と X_n の共通部分として得られることを示せ.

問題 3: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ とおく.

(1) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ での極座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta,\ \ r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

について, そのヤコビアン

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

を計算せよ.

(2) 重積分

$$\iiint_\Omega |xyz|\,dx\,dy\,dz$$

の値を求めよ.

問題 4: $x = \tan y$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$) を逆に解いて $y = f(x) = \tan^{-1} x$ とする.

(1) 導関数 f' を計算せよ.

(2) 実数値の C^1 級関数を $g(x)$ とし, f との合成関数 h を $h(x) = f(g(x))$ で定める. このとき, 導関数 h' を g と g' を用いて表わせ.

(3) $h(0) = 0$ であり, かつ任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|h'(x)| \le 1$ が成り立つとき, $|h(x)| \le |x|$ であることを示せ.

(4) これより, $g(0) = 0$ であり, かつ任意の $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して $|g'(x)| \le 1 + (g(x))^2$ が成り立つとき, $|g(x)| \le |\tan x|$ であることを示せ.

平成 16 年度東京都立大学大学院 (理学研究科修士課程) 入学試験 (9 月 2 日 (火) 13 : 00 ∼ 15 : 30)

数学 II

$A1$-$A3$ **のうち 1 問を選択し解答せよ．さらに** $B1$-$B9$ **のうち 2 問を選択し解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．**

問題 A1: R を可換環とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) P と Q を R の相異なる素イデアルとする．次の主張が正しければ証明を与え, 誤りであれば反例を挙げよ.

「共通部分 $P \cap Q$ は素イデアルである.」

(2) $x^n = 0$ となる自然数 n が存在する様な $x \in R$ 全体の集合 N は R のイデアルであることを示せ.

(3) N を (2) で定義された集合とし, $I \subset N$ を R のイデアルとする．商環 R/I において可逆になる様な $x \in R$ は R でも可逆であることを示せ.

問題 A2: $\mathbb{R}^2$ の部分集合 Y と Z を $Y = \{(x, y) \; |x < y\}, \quad Z = \{(u, v) \; |u^2 > 4v\}$ で定める．また, 写像 $f : Y \longrightarrow Z$ を $f(x, y) = (x + y, xy)$ で定める．このとき, 次の問いに答えよ.

(1) Y と Z には自然な C^∞ 級微分可能多様体の構造が入ることを示せ.

(2) f は Y から Z への C^∞ 級微分同相写像になることを示せ.

(3) Y 上の C^∞ 級微分 1 次形式 θ を

$$\theta = \frac{dx - dy}{x - y}$$

で定める．Z 上の C^∞ 級微分 1 次形式 ω で $f^*\omega = \theta$ となるものを求めよ.

問題 A3: (1) $R>0$ とし, $f:[-R,R]\longrightarrow\mathbb{C}$ は $[-R,R]$ 上ルベーグ可積分であるとする. $\mathbb{C}$ 上の関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-R}^{R}e^{-ix\xi}f(x)\,dx,\quad \xi\in\mathbb{C}$$

で定める. このとき $\hat{f}(\xi)$ は $\mathbb{C}$ 上正則で,

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{-R}^{R}(-ix)^n f(x)\,dx\right)\xi^n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則とする. ある定数 $K>0, C>0$ が存在して

$$|g(z)|\le\frac{Ce^{K|\mathrm{Im}\ z|}}{(1+|z|)^2},\quad z\in\mathbb{C}$$

が成り立つとする.

$$\check{g}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixs}g(s)\,ds,\quad x\in\mathbb{R}$$

とおくとき, 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\check{g}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix(s+it)}g(s+it)\,ds$$

が成り立つことを示せ.

(3) $g(z)$ を (2) のとおりとする. このとき, (2) の等式を用いて, $|x|>K$ なる任意の x に対して $\check{g}(x)=0$ となることを証明せよ.

問題 B1: $\mathbb{Q}$ を有理数体とする.

(1) 素数 p に対して, $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを証明し, その拡大次数を求めよ. ただし, 正の整数 n に対し, $[\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n)):\mathbb{Q}]=\varphi(n)$ であることは使ってよい. ここで, $\varphi(n)$ はオイラー関数 (1 から n までの整数の中で n と互いに素なものの数) である.

(2) $\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p))/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示せ.

(3) 次の関係のうち, 成り立つものに証明を与えよ.

$$\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p))\subset\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p)),\quad \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))\subset\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p)),$$

$$\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))=\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p)),\quad \mathbb{Q}(\cos(2\pi/p))\neq\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p)).$$

問題 B2: $\mathbf{S}_3$ を 3 次対称群とする.

(1) $\mathbf{S}_3$ の部分群をすべて並べあげよ.

(2) $\mathbf{S}_3$ の正規部分群をすべて並べあげよ.

(3) 群 G が g_1 と g_2 で生成され, しかも, $g_1^2 = g_2^2 = 1$, かつ, $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$ が成立しているとせよ. このとき, G の位数は 6 以下であることを証明せよ.

(4) (3) の仮定のもとで, G はいかなる群と同型になりうるか, 可能性をすべてあげよ.

問題 B3: 8 角形 $ABCDEFGH$ の辺 AB と辺 FE, 辺 CD と辺 HG を同一視して得られる図形を X とする. 以下の問いに答えよ.

(1) X の概形を描け.

(2) X の 1 次元ホモロジー群を求めよ.

(3) X とそのコピーを境界で同一視して得られる図形 Y の 1 次元ホモロジー群を求めよ.

問題 B4: 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面がはめ込み

$$\varphi \;:\; M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

によって定義されていると仮定する.

(1) 曲面 $\varphi(M)$ のガウス写像 g はどのように定義される写像か説明せよ.

(2)
$$M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$
および
$$\varphi \;:\; M \ni (r,s) \longmapsto (r\cos(s), r\sin(s), ar+b) \in \mathbb{R}^3$$
と仮定する. ここで, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ とし, a, b を正の定数とする. このとき, この写像 φ は, はめ込みであることを示せ. さらに, この曲面の第 1 基本形式, 第 2 基本形式, ガウス曲率, 平均曲率およびガウス写像を求めよ.

(3) 任意の単位ベクトル $v \in S^2(1)$ に対して, M 上のベクトル v 方向の高さ関数を,
$$f_v(x) := \langle \varphi(x), v \rangle \qquad (x \in M)$$
と定める. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積を表わす. このとき, 点 $x_0 \in M$ が関数 f_v の臨界点であるための条件を求めよ.

問題 B5: 複素平面 $\mathbb{C}$ 上正則な関数 f に対して

$$M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

とおく. ここで, $\log^+ 0 = 0$ であり, $x > 0$ に対して, $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ である.

(1) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0$ のとき,

$$m(r,f) = n \log r + O(1) \quad (r \to +\infty)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(z)$ が指数関数 e^z のとき, $m(r,f)$ を計算せよ.

(3) $0 \le r < R$ のとき, 一般に

$$m(r,f) \le \log^+ M(r,f) \le \frac{R+r}{R-r} m(R,f)$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 B6: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界連続であるとする. $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ とし,

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy, \qquad (t,x) \in \Omega$$

とおく. このとき, 次の (1),(2),(3) を証明せよ.

(1) u は Ω 上 C^2 級で,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega$$

が成り立つ.

(2)

$$u(t,x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (f(x - 2\sqrt{t}s) - f(x))\, ds, \quad (t,x) \in \Omega.$$

(3)

$$\lim_{t \to +0} u(t,x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

問題 B7: $T=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ 上の複素数値 2 乗可積分関数全体の成すヒルベルト空間を $L^2(T)$ とする. ただし, その内積は

$$(f,g)_{L^2(T)}=\int_0^{2\pi} f(e^{is})\overline{g(e^{is})}\,ds$$

とする. 無理数 θ を 1 つ定めて, $f\in L^2(T)$ に対して

$$(Uf)(t)=tf(t),\quad (Vf)(t)=f(te^{2\pi i\theta}),\quad t\in T$$

としたとき, 次の問いに答えよ.

(1) U,V はユニタリ作用素であることを示せ.

(2) $VU=e^{2\pi i\theta}UV$ が成り立つことを示せ.

(3) K を U と可換な $L^2(T)$ 上の有界線形作用素とする. $g_n(t)=t^n$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく.

$$(Kg_n)(t)=(Kg_0)(t)g_n(t)$$

が成り立つことを示せ. また, これを用いて K が関数 Kg_0 による乗法作用素であることを示せ.

(4) U,V と可換な $L^2(T)$ 上の有界線形作用素は恒等作用素の定数倍に限ることを示せ.

問題 B8: $\alpha\neq 0$ を実定数とする. 三重対角の無限行列 $A=(a_{i,j})$

$$i,j\in\mathbb{Z}\text{ に対して}\quad a_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ \alpha, & i=j\pm 1\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

を考える. さらに, 逆行列 $A^{-1}=(b_{i,j})$ が存在して $b_{i,j}=b_{|i-j|,0}$, $i,j\in\mathbb{Z}$ であるとする.

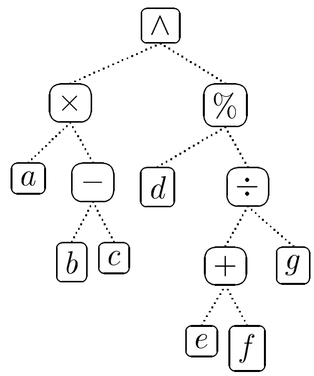
(1) $\alpha b_{n-1,0}+b_{n,0}+\alpha b_{n+1,0}=\delta_{n,0}$, $n\in\mathbb{Z}$ を示せ. ただし $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタとする.

(2) ある定数 c と d があって, $b_{n,0}=dc^{|n|}$, $n\in\mathbb{Z}$ (ただし $|c|<1$) となる解をもつような実数 α の範囲を求めよ.

(3) そのときの c,d を α で表わせ.

(4) E を単位行列として, $A=E+\alpha J$ で J を定める. $|\alpha|$ が十分小さいならば, 行列の級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha J)^n$ が成分ごとに収束することを示せ.

問題 B9: 次の二分木



を考える．これは，変数 a, b, c, d, e, f, g と，二項演算子 $+$, $-$, $\times$, $\div$, %, $\wedge$ に関する，ある算術式の演算の解析木であるとする．これはまた，節点のデータ a, b, c, d, e, f, g, $+$, $-$, $\times$, $\div$, %, $\wedge$ に関して，左部分木が前 (小) で，右部分木が後 (大) となるような，二分探索木でもあるとする．これに対し，次の問いに答えよ．

(1) この木に対応する算術式を，演算の順序に紛れがないように適当に括弧 ( ) を付けて，中置記法 (通常の記法) で書け．

(2) この木を後順走査した節点のデータを，その順に左から右に一列に書き並べよ．

(3) (2) の解を利用してスタックにより与式を計算するとき，最深の (最も多くの段数を積んだ) スタックの状態を書け．

(4) 二分探索木が決める順序のもとで記号 e の直前と直後の記号をあげよ．

(5) 同じ記号 a, b, c, d, e, f, g, $+$, $-$, $\times$, $\div$, %, $\wedge$ に関する，同じ順序による二分探索木で，しかも完全二分木となるものは，やはりある算術式の演算の解析木となるが，それに対応する算術式を，演算の順序に紛れがないように適当に括弧 ( ) を付けて，中置記法 (通常の記法) で書け．

平成 16 年度東京都立大学大学院 (理学研究科修士課程) 入学試験 (9 月 2 日 (火) 16 : 00 ～ 17 : 00)

英語

次の 2 問に解答せよ．問題ごとに別の答案用紙を用いよ．30 分以降途中退室してもよい．

問題 1: 次の英文を和訳せよ．

It happens frequently that a divergent infinite series may be used for the numerical computation of a quantity which in some sense can be regarded as the "sum" of series. The typical situation is that of a series of variable terms whose "sum" is a function, and the approximation afforded by the first few terms of the series is the better the closer the independent variable approaches a limiting value. In most cases the terms of the series at first decrease rapidly (the more rapidly the closer the independent variable approaches its limiting value) but later the terms start increasing again. Such series are called *asymptotic series*. Asymptotic series may be convergent or divergent.

Let us consider an example first discussed by Euler(1754). The series

$$S(x) = 1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^n n! x^n$$

is certainly divergent for all $x \neq 0$, yet for small x (say 10^{-2}) the terms of the series at first decrease quite rapidly, and an approximate numerical value of $S(x)$ may be computed. What function of x does this numerical value represent, approximately?

Euler considers $\phi(x) = xS(x)$. Then

$$\phi'(x) = 1! - 2!x + 3!x^2 - \cdots = (x - \phi(x))/x^2,$$

or

$$x^2\phi'(x) + \phi(x) = x,$$

and $\phi(x)$ may be obtained as that solution of this differential equation which vanishes at $x = 0$.

(抜粋　Asymptotic Expansions, A. Erdelyi, Dover 1956)

問題 2: 次の文章をそれぞれ英訳せよ.

(1) 定義:　関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つことである.

(2) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から集合 A への全単射 f が存在するとき, 集合 A は可算であると定義する. このとき, 次が成り立つ.

命題: 有理数全体からなる集合 $\mathbb{Q}$ は可算である.