

平成 15 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程  
入学試験 (2月 18日 (火) 9:30~11:30)  
数学 I

次の 4 問に解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 1: 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -x - y + z.$$

問題 2: 実数全体  $\mathbb{R}$  の部分集合  $X$  がコンパクトとは  $X$  の开区間の任意の被覆族  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  が与えられたとき、その中から有限個、例えば、 $U_1, U_2, \dots, U_n$  を取り出して  $X$  を被うことができる:

$$X \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

と定義する。そのとき

(1)  $X$  の点列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  が  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  を満たせば、常に  $x \in X$  となることを示せ。

(2) 次の集合はコンパクトかどうか簡単な説明を付して答えよ。

(2a)  $[0, 1)$

(2b)  $[0, 1]$  中の有理数全体  $A$

(2c)  $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

問題 3: 複素関数列  $\{f_n\}$  を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{C}$$

で定義する。このとき、任意の複素数  $x, y$  に対して

$$|f_n(x)f_n(y) - f_n(x+y)| < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(|x| + |y|)^k}{k!},$$

が成立することを示し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)f_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x+y)$$

を証明せよ。

問題 4:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$  とおく。次の重積分の値を求めよ。

$$(1) I_1 = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

$$(2) I_2 = \iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

平成 15 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程  
入学試験 (2 月 18 日 (火) 13:00~15:30)  
数学 II

A1 – A3 のうち 1 問を選択し解答せよ。さらに B1 – B9 のうち 2 問を選択し解答せよ。  
問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

---

問題 A1:  $k$  を体、 $x$  を不定元として、環  $R := k[x]/(x^2)$  を考える。

- (1)  $R$  の元  $f$  に対し、 $f$  が乗法の可逆元になるための必要十分条件を求めよ。
- (2)  $R$  のイデアルを全て求めよ。
- (3) 1 個の元で生成される  $R$  加群を同型を除き分類せよ。

問題 A2:  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  の部分集合

$$U = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\}, V = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\}$$

とする。 $(x, y) \in U$  に対し、 $(0, 1)$  と  $(x, y)$  を結ぶ直線と  $x$  軸との交わりの  $x$  座標を  $\phi(x, y)$  とする。同様に  $(x, y) \in V$  に対し、 $(0, -1)$  と  $(x, y)$  を結ぶ直線と  $x$  軸との交わりの  $x$  座標を  $\psi(x, y)$  とする。そのとき以下を示せ。

- (1)  $(U, \phi), (V, \psi)$  は  $S^1$  の座標近傍系である。
- (2)  $S^1$  は多様体になる。
- (3) 商群  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  は自然に多様体になる。
- (4) 多様体  $S^1, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  は微分位相同型である。

問題 A3:

- (1)  $t > -1$  に対して、不等式  $\log(1+t) \leq t$  が成り立つことを示せ。
- (2) 関数  $f(x) = |x|e^{-x^2}$  は  $\mathbb{R}$  上で積分可能であることを示せ。
- (3) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-\infty}^{\infty} \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) dx$$

問題 B1:  $n$  を自然数とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で生成された  $GL_2(\mathbb{C})$  の部分群を  $G_n$  とおく。ここで、 $\mathbb{C}$  は複素数体、 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  はその乗法群、 $GL_2(\mathbb{C})$  は逆を持つ  $2 \times 2$  乗法行列群とする。

- (1)  $G_n$  の位数を求めよ。
- (2)  $1$  が  $C \in GL_2(\mathbb{C})$  の固有値であるとき、 $C$  は pseudo-reflection ということにする。 $G_n$  に含まれる pseudo-reflection の個数を求めよ。
- (3)  $G_n$  は、有限個の pseudo-reflection で生成されることを証明せよ。

問題 B2: 有理数体を  $\mathbb{Q}$  とし、 $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{F}_7 := \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  をそれぞれ標数 5 と 7 の素体とする。多項式  $P(X) = X^3 - 4$  を自然にそれぞれ  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$  の上で考え、それぞれの最小分解体を順次  $K_1, K_2, K_3, K_4$  とする。このとき拡大次数  $d_1 := [K_1 : \mathbb{Q}], d_2 := [K_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{-3})], d_3 := [K_3 : \mathbb{F}_5], d_4 := [K_4 : \mathbb{F}_7]$  を求めよ。

問題 B3: ソリッドトーラス  $X = D^2 \times S^1$  について、以下の問に答えよ。ただし

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

とする。

- (1)  $X$  の  $\mathbb{Z}$  係数ホモロジー群を求めよ。
- (2)  $P = \{0\} \times \{1\}$  とする。 $X \setminus P$  の  $\mathbb{Z}$  係数ホモロジー群を求めよ。
- (3)  $Y = \{0\} \times S^1$  とする。 $X \setminus Y$  の  $\mathbb{Z}$  係数ホモロジー群を求めよ。

問題 B4:

(1) 曲面の助変数表示  $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  を使って、曲面のガウス曲率  $K(u, v)$  と平均曲率  $H(u, v)$  を定義せよ。

(2) 座標変換  $\hat{u} = \hat{u}(u, v), \hat{v} = \hat{v}(u, v)$  とし、ヤコビ行列式

$$J = \begin{vmatrix} \partial \hat{u} / \partial u & \partial \hat{u} / \partial v \\ \partial \hat{v} / \partial u & \partial \hat{v} / \partial v \end{vmatrix}$$

が正であるとする。 $K(\hat{u}, \hat{v}) = K(u, v)$  かつ  $H(\hat{u}, \hat{v}) = H(u, v)$  であることを証明せよ。

(3) 曲面  $x^2 + y^2 = z^2$  の点  $(x, y, z)$  でのガウス曲率と平均曲率を求めよ。

問題 B5:

(1) 整関数  $f(z), g(z)$  が関数等式  $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$  を満たせば、 $F(z) = f(z) + ig(z)$  は値 0 を取らないことを証明せよ。

(2) 整関数  $F(z)$  が値 0 を取らなければ、ある整関数  $\theta(z)$  があって、 $F(z) = e^{\theta(z)}$  と書けることを厳密に証明せよ。

(3) 問(1)の整関数  $f(z), g(z)$  に対して、ある整関数  $\theta(z)$  があって、 $f(z) = \cos \theta(z), g(z) = \sin \theta(z)$  と書けることを証明せよ。 $\theta(z)$  は複素数値関数だが、それでも成立することも説明せよ。

問題 B6:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  と  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数で

$$\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad g(s) < f(t, s)$$

を満たすとする。 $T > 0, a < b$  とし、 $x(t), y(t)$  を  $[0, T)$  上定義された実数値  $C^1$  級関数で、次の方程式を満たすものとする。

$$(i) \quad \frac{d}{dt}x(t) = g(x(t)), \quad t \in (0, T), \quad x(0) = a$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, T), \quad y(0) = b.$$

このとき、 $x(t) < y(t)$  ( $t \in [0, T)$ ) が成り立つことを次の手順で証明せよ。

(1)  $x(t), y(t)$  の  $t = 0$  での連続性を用いて

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall t \in [0, \delta], \quad x(t) < y(t)$$

が成り立つことを示せ。

(2)  $K = \{s \in (0, T) \mid \forall t \in [0, s], x(t) < y(t)\}$  とおく。このとき、

$$\delta \leq \sup K \leq T \quad \text{および} \quad \forall t \in [0, \sup K), x(t) < y(t)$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $J = \sup K$  とおく。 $J = T$  が成り立つことを背理法を用いて示そう。その為に、 $J < T$  を仮定する。このとき、等式

(iii)  $x(J) = y(J)$

を導け。さらに、この等式と方程式 (i),(ii) を用いて矛盾を導け。

問題 B7: 可算無限次元ヒルベルト空間  $H$  上の有界線型作用素  $T$  について次の問に答えよ。

- (1)  $T$  がコンパクト作用素である定義を述べよ。
- (2) 問 (1) の自明でない例を与えよ。
- (3)  $T$  がコンパクトでない例を与えよ。
- (4)  $T$  がコンパクトなら  $T^*$  もコンパクトであることを示せ。ここで  $T^*$  は  $T$  の共役作用素である。

問題 B8: (1)  $n \times n$  行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$

と、ベクトル  $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  に対して  $Ax = e_1$  の解  $x$  を具体的に書き表せ。

- (2)  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。
- (3) ベクトル  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  のノルムを  $\|x\| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$  とし、 $n \times n$  実正方行列  $A$  のノルムを  $|A| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$  と定める。 $n$  によらない適当な正数  $c_1, c_2$  があって  $c_1 n^2 \leq |A^{-1}| \leq c_2 n^2$  であることを示せ。

問題 B9: 算術式  $((A \times (B + C)) - D) + (E \div (F \times G))$  に対し以下の各問に答えよ。

- (1) 与えられた算術式の解析木である二分木を構成せよ。
- (2) 問 (1) で構成した二分木を間順走査した節点を書き並べよ。
- (3) 問 (1) で構成した二分木を後順走査した節点を書き並べよ。
- (4) 与えられた算術式と、式の値は常に等しいが、その解析木は問 (1) の解と異り、それを間順走査した節点を書き並べると問 (2) の解と同じになる算術式を書け。
- (5) 問 (3) の解を利用してスタックにより与式を計算するときのスタックの状態の推移を書け。