平成15年度東京都立大学大学院(理学研究科) 修士課程
入学試験 (9月3日(火) 9:30〜11:30)
数学 I

次の4問に解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

問題 1: ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$$

と定義する。

(1) W は V の3次元部分空間であることを示せ。

(2)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \Gamma' &= \left\{ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

はともに W の基底を与えることを示せ。

(3) Γ, Γ' の間の基底変換を与える行列を求めよ。

問題 2: $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$A_1 = \left\{ (x, y) \mid x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ (x, y) \mid x < 0,\ y = \sin \frac{1}{x} \right\}$$

を考え、それらの閉包を $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ とする。

(1) 集合 $\bar{A}_i - A_i$ $(= \{(x, y) \in \bar{A}_i \mid (x, y) \notin A_i\})$ を求めよ。

(2) $A = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ は連結であることを示せ。

(3) A は弧状連結でないことを示せ。

問題 3: 一変数関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

で定義する。

(1) 0 でない任意の多項式 $P(x)$ に対して $\lim_{x \to +0} f(x)/P(x) = 0$ を示せ。

(2) $f(x)$ は 任意の $k \geq 1$ について k 回微分可能で、$(k-1)$ 次の多項式 $Q_k(x)$ があって、

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} f(x)\dfrac{Q_k(x)}{x^{2k}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

と書けることを示せ。

(3) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

で定義する。関数 $g(x)$ のグラフを描け。

(4) $g(x+1)$ と $\sin x$ の積 $h(x) = g(x+1)\sin x$ を考える。$h(x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開を求めよ。

問題 4: (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の標準座標系とし、

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0\},\ r > 0$$

とする。

$$n(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$$

を U の外向き単位法ベクトル場とし、$a(x, y, z) = (1, 1, 1)$ とおく。このとき、面積分

$$\int_U a \cdot n \, dS$$

の値を求めよ。ここで dS は面積要素、$a \cdot n$ は a と n の内積を表す。

平成 15 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程
入学試験 (9 月 3 日 (火) 13:00〜15:30)
数学 II

$A1-A3$ **のうち** 1 **問を選択し解答せよ。さらに** $B1-B9$ **のうち** 2 **問を選択し解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。**

問題 A1: A は乗法の単位元を持つ整域とする。次の各主張について正しければ証明を与え、間違っていればその反例を与えよ。

(1) A のイデアル I が極大イデアルならば素イデアルである。

(2) A のイデアル I が素イデアルならば極大イデアルである。

(3) A の既約元は素元である。

問題 A2: $M(2)$ を 2 次実正方行列の空間とし、自然な対応

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

で $\mathbb{R}^4$ と同一視する。$\phi = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^1 + x_3^2,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + x_4^2$$

で定義する。$M(2)$ の部分空間 $SO(2)$ を

$$SO(2) = \{X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid {}^tXX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$$

とする。

(1) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ での ϕ の ヤコビ行列 $J(\phi)(X_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0))$ を求めよ。

(2) $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して $\psi_\theta : M(2) \to M(2)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

で定義する。$\phi \circ \psi_\theta = \phi$ を示せ。

(3) $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。ファイバー $F = \phi^{-1}(1, 0, 1)$ を考える。

$$F_+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \mid x_1x_4 - x_2x_3 > 0\}$$
$$F_- = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \mid x_1x_4 - x_2x_3 < 0\}$$

とすると、$F = F_+ \cup F_-$ と表されることを示し、さらに

$$F_+ = \{\psi_\theta(X_0) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad F_- = \{\psi_\theta(Y_0) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

となることを示せ。

(4) (問 (2) を使って)F_+ の任意の点 $P=\psi_\theta(X_0)$ でヤコビ行列 $J(\phi)(P)$ の階数が 3 であることを示せ。これを使って F_+, F_- はコンパクト 1 次元多様体であることを示せ。

(5) F_+ は $SO(2)$ と一致することを示せ。

問題 A3: f を区間 $[0,1]$ で定義された実数値可積分関数とする。

(1) $A=\{x\in[0,1]\mid f(x)\le 0\}$ とおく。次を示せ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_A \log\bigl(1+\exp\{n\ f(x)\}\bigr)\ dx = 0.$$

(2) $t>0$ なら、$\log\bigl(1+\exp\{t\}\bigr)<\log 2+t$ となることを示せ。

(3) $B=\{x\in[0,1]\mid f(x)>0\}$ とおく。次を示せ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_B \log\bigl(1+\exp\{n\ f(x)\}\bigr)\ dx \le \int_B f(x)\ dx.$$

(4) 次を示せ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \log\bigl(1+\exp\{n\ f(x)\}\bigr)\ dx = \int_B f(x)\ dx.$$

問題 B1: $\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ とおく。

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の α の共役元をすべて求めよ。

(2) K を $\mathbb{Q}(\alpha)$ を含み $K/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であるような最小の体とするとき拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ。

(3) Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の抽象群としての構造を求めよ。

(4) K に含まれる $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大をすべて求めよ。

問題 B2: C_2, C_3 をそれぞれ位数 $2,3$ の巡回群とする。

(1) C_2 及び C_3 の自己同型群を決定せよ。

(2) 直積群 $C_2\times C_3$ の自己同型群は可換群であることを示せ。またその位数を求めよ。

(3) 直積群 $C_3\times C_3$ の自己同型群は非可換群であることを示せ。またその位数を求めよ。

問題 B3: K を図のような 1 次元複体とする。

(1) $H_1(K, \mathbb{Z})$ を定義に従って計算せよ。

(2) $|K| \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ とし、$a_0 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ とする。$\sigma \in K$ に対して、$\hat{\sigma} = \{ta_0 + (1-t)x \mid 0 \leq t \leq 1, x \in \sigma\} \subset \mathbb{R}^3$ と定義すると、$\hat{K} = K \cup \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in K\} \cup \{|a_0|\}$ は 2 次元複体になることを示せ。

(3) $H_1(\hat{K}, \mathbb{Z})$, $H_2(\hat{K}, \mathbb{Z})$ を求めよ。

問題 B4: 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内に曲面 S を、

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u)), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

によって定める。ここで $f(u)$ は u について C^∞ 級の関数とする。

(1) この曲面の単位法ベクトル場、第一基本形式、第二基本形式を求めよ。

(2) この曲面のガウス曲率および平均曲率を求めよ。

(3) この曲面は、2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と等長同型であることを、次の写像が等長同型写像になることを証明することによって示せ：

$$\varphi : S \ni (u, v, f(u)) \longmapsto (g(u), v) \in \mathbb{R}^2,$$

ただし、u_0 は区間 I の固定した点とし、

$$g(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

と定める。

問題 B5: 区間 $[0,1]$ 上の 2 乗可積分実数値関数全体のなすヒルベルト空間を $L^2[0,1]$ としたとき、次の問いに答えよ：

(1) $L^2[0,1]$ は可算無限列でその任意有限部分列が線型独立なものを含む。

(2) $L^2[0,1]$ の可算無限列 $\{e_n \mid n=1,2,3,\ldots\}$ で $\langle e_n|e_n\rangle = 1$, $\langle e_n|e_m\rangle = 0$ $(n \neq m)$ を満たすものが存在する。

(3) (2) の $\{e_n\}$ に対して、$\langle f|e_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$ が全ての $L^2[0,1]$ の元 f について成り立つ。

ただし $\langle\ |\ \rangle$ は $L^2[0,1]$ の内積を意味する。

問題 B6: $D = (0, \pi) \times (0, \pi)$ とおく。境界値問題

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in D \tag{1}$$

$$u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad 0 \le y \le \pi \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0\,, \quad u(x,\pi) = f(x) \qquad 0 \le x \le \pi \tag{3}$$

の解 $u(x,y)$ で、D 内で無限回微分可能で $\bar{D}$ 上連続なものを考える。ここで、$f(x)$ は $[0,\pi]$ 上の連続関数で、$f(0) = f(\pi) = 0$ を満たすものとする。

(a) 関数 $u(x,y) = X(x)\sinh\lambda y$ が (1),(2) を満たすように関数 $X(x)\,(\neq 0)$ と定数 $\lambda > 0$ を定めよ。

(b) $f(x) = \sin x$ のとき、境界値問題 (1)-(3) の解を求めよ。

(c) $f(x)$ は Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

で表されているとする。このとき境界値問題 (1)-(3) の級数解を求めよ。

問題 B7: (1) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数

$$f(z) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}$$

の極をすべて求めよ。

(2) 関数 $f(z)$ を整数 n のまわりでローラン展開すると、その主要部が

$$\frac{1}{(z-n)^2}$$

であることを証明せよ。

(3) 整数全体を $\mathbb{Z}$ と表すと、

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ $(= \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{Z}\})$ 上広義一様収束することを証明せよ。

(4) $f(z) = g(z)$ を示せ。

問題 B8: 二実数の和, 積の時間計算量を, それぞれ a, m とする。 また実数 x の正整数 n 倍である値 nx を計算する関数 $f_i(x, n)$ $(i = 1, 2, 3)$ を以下の様に定義する：

$$
\begin{aligned}
f_1(x, n) &= nx, \\
f_2(x, n) &= \sum_{i=1}^{n} x, \\
f_3(x, n) &= \begin{cases} x & & (n = 1), \\ w + w & \text{ただし } w = f_3(x, n/2) & (2 \mid n > 1), \\ w' + w' + x & \text{ただし } w' = f_3(x, (n-1)/2) & (2 \nmid n > 1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

関数呼び出し, 変数への代入, $n/2$, $(n-1)/2$ の計算, $n > 1$, $2 \mid n$, $2 \nmid n$ の判定などの時間計算量は無視する。関数値 $nx = f_i(x, n)$ $(i = 1, 2, 3)$ は忠実に定義に沿って計算する。

(1) 関数 $f_i(x, n)$ $(i = 1, 2)$ の時間計算量を, それぞれ a, m, n の式で表せ。

(2) 関数 $f_3(x, n)$ について, その時間計算量を $n = 2^N$, $n = 2^{N+1} - 1$ の時, それぞれ a, N の式で表せ。 更に, その最悪時間計算量を a, n の式で表せ。

(3) 関数 $f_3(x, n)$ が正しく値 nx を計算する事, 即ち部分正当性と停止性を証明せよ。

問題 B9: 等差数列は、次の形をしている整数の無限集合である。

$$A(b, a) = \{b, a + b, 2a + b, 3a + b, ...\}$$

等差数列の集合 $A(b_1, a_1), ..., A(b_k, a_k)$ が完全被覆であるとは、すべての非負整数がどれかひとつの数列に一度だけ現われることである。

(1) $k \leq 3$ をみたす完全被覆の全体を求めよ。

(2) $A(b_1, a_1), ..., A(b_k, a_k)$ を完全被覆とする。$a_1, ..., a_k$ はどんな条件をみたすか。

(3) $k \geq 2$ かつ $a_1 < ... < a_k$ をみたす完全被覆は存在しないことを示せ。

平成 15 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程
入学試験 (9 月 3 日 (火) 16:00〜17:00)
英語
30 分以降途中退室してもよい

問題 1: 次の英文を和訳せよ。

The study of singular points of linear differential equations begins with the first-order linear differential equation $dw/dz + p(z)w = 0$. We will treat only isolated singular points. For such singular points, one can assume that p is a holomorphic function in the punctured disc $\Delta = \{z \mid 0 < |z| < \rho\}$ because any singular point can be put at the origin by a translation of coordinates.

It follows that $p(z)$ can be expanded into a Laurent series $p(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$, convergent in Δ. When all a_k with $k < 0$ vanish, $p(z)$ is said to have a removable singularity at $z = 0$; when there is a largest negative integer $k = -m$ for which $a_k \neq 0$, $p(z)$ is said to have a pole of order m there; if there are an infinite number of nonzero coefficients a_k with $k < 0$, $p(z)$ is said to have an essential singularity at the origin.

In all cases, the general solution of the differential equation is given by the indefinite integral formula $w = exp[-\int p(z)dz]$.

As a corollary, we obtain the representation of the solution w in the form $w = Cz^{\alpha}g(z)$, $\alpha = -a_{-1}$, where $g(z)$ is a holomorphic function in the domain Δ.

We now describe the fundamental classification of singularities for the differential equation at any isolated singular point of $p(z)$.

DEFINITION. If $p(z)$ has a removable singularity, then the differential equation has a removable singularity; if $p(z)$ has a pole of order one, then the differential equation has a regular singular point; if $p(z)$ has a pole order of $m > 1$ or an essential singularity, then the differential equation has an irregular singular point.

[G. Birkhoff and G.-C. Rota, Ordinary Differential Equations, Ginn and Company, 1962]

問題 2: (1) 次を英訳せよ。

定理：n 次元ベクトル空間 V の r 次元部分空間 W から p 個の 1 次独立なベクトル $x_1, \ldots, x_p$ をとると、$p \leq r$ であり、これに適当なベクトル $x_{p+1}, \ldots, x_r$ をつけ加えることにより $x_1, \ldots, x_r$ は W の基底となる。さらに $n - r$ 個のベクトル $x_{r+1}, \ldots, x_n$ をつけ加えて、V の基底とすることができる。

(2) 定理の証明を英語で書け。