平成 14 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程 入学試験 (2 月 13 日 (水) 9:30〜11:30) 数学 I

次の 4 問に解答せよ。 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1: ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において 3 点 $A(0,1,2)$, $B(3,0,1)$, $C(1,2,0)$ の定める平面 α へ原点 $O(0,0,0)$ から下した垂線を OH とする。このとき、

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) H の座標を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

(4) $\mathbb{R}^3$ の線型変換 $f : V \to V$ で、四面体 $OABC$ を自分自身の上に写すものはいくつあるか？ また、それらの行列式をすべて求めよ。

問題 2: X, Y を位相空間とする。X の部分空間の族 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ が存在して、次の条件をみたすものとする。

(i) $X_n (n \geq 1)$ が (X の) 閉集合で、$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots$ かつ $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$.

(ii) A を X の部分空間とするとき、次のことは同値。

A が (X の) 閉集合 $\iff$ 各 $n \geq 1$ に対し、$A \cap X_n$ が X_n の閉集合。

ここで、X_n は X から誘導された位相による位相空間とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は各 X_n に制限した関数 $f|_{X_n} : X_n \to Y$ が連続であることである。

(2) $X = \mathbb{R}$, $X_n = [-n, n] (n \geq 1)$ とおくとき、族 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ は条件 (i),(ii) をみたすことを示せ。

問題 3: a は正の有理数とする。関数 $\phi(x) = (1+2x)^a$ に関して次の問に答えよ。

(1) $a_j = \phi^{(j)}(0)/j!$ とおく。但し、$\phi^{(j)}$ は ϕ の j 階微分である。a_j を求めよ。

(2) ある自然数 N が存在して $n \geq N$ に対して $a_n = 0$ となるのは、a がどのような時か。

(3) べき級数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ の収束半径 ρ を求めよ。

問題 4: 次の重積分の値を求めよ。

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{1+(2x+y)^2+(2y-x)^2\}^2}\, dxdy$

平成14年度東京都立大学大学院(理学研究科) 修士課程
入学試験 (2月13日(水) 13:00〜15:30)
数学 II

$A1-A3$ **のうち** 1 **問を選択し解答せよ**. **さらに** $B1-B9$ **のうち** 2 **問を選択し解答せよ**. **問題ごとに別の答案用紙を用いよ**.

問題 A1: 位数3の巡回群 A と位数9の巡回群 B の直積群 $G = A \times B$ を考える。

(1) G の部分群で A と同型なものはいくつあるか、理由とともに答えよ。

(2) G の部分群で B と同型なものはいくつあるか、理由とともに答えよ。

(3) G の部分群で $A \times A$ と同型なものはいくつあるか、理由とともに答えよ。

問題 A2: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を可微分写像とする。写像 $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1}$ で定義する。

(1) $F^{-1}(0)$ が可微分多様体であることを示せ。

(2) $F^{-1}(0)$ は $\mathbb{R}^n$ と微分同型であることを示せ。

(3) $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ とし、$F_1(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2) - x_3$, $F_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2) - x_3$ とする。$F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0)$ が可微分多様体であることを示せ。

(4) $F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0)$ はコンパクトになるか?$F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0)$ は連結になるか?理由とともに答えよ。

問題 A3: $I = [0, 2]$ とし、$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ ($x \in I$) とする。また、$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は I の各点で収束することを示せ。また、極限 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ は連続関数か?

(2) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n(x))$ は (Lebesgue) 可測階段関数であることを示せ。

(3) 定数 M が存在して、$|\varphi(f_n(x))| \leq M$ ($n = 1, 2, \cdots, x \in I$) が成り立つことを示せ。

(4) Lebesgue の有界収束定理を用いて、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi(f_n(x))\, dx = \varphi(0) + \varphi(1).$$

問題 B1: (1) 多項式 $H(x) = x^5 + 2$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とするとき拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求め、$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の構造を決定せよ。

(2) 素数 p に対し、位数 p の有限体を $\mathbb{F}_p$ と表わそう。$\mathbb{F}_p$ 上の多項式 $H(x) = x^5 + 2$ の $\mathbb{F}_p$ 上での最小分解体を F とするとき、拡大次数 $[F : \mathbb{F}_p]$ と $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{F}_p)$ の構造を $p = 7$ と $p = 11$ の場合に決定せよ。

問題 B2: R は乗法に関する単位元 1 をもつ可換環とする。

(1) I, J は $R = I + J$ を満たす R のイデアルとする。同型

$$R/I \cap J \cong R/I \oplus R/J$$

が成立することを示せ。

(2) $R = \mathbb{C}[x, y]$, I は $x^2 + y^2 - 1$ と $y - x^2 + 1$ で生成されたイデアルとする。このとき、

$$R/I \cong \mathbb{C}[x]/(x+1) \oplus \mathbb{C}[x]/(x-1) \oplus \mathbb{C}[x]/(x^2)$$

となることを示せ。

問題 B3: 2 変数複素係数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ の中で、 x, y に関する次数の和が高々2 次である式の全体

$$Q := \left\{ \sum_{0 \le i,\ 0 \le j,\ i+j \le 2} a_{ij} x^i y^j \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

は自然に複素線型部分空間をなす。ただし、x, y は不定元とする。次の問に答えよ。

(1) Q の次元を求めよ。

(2) 点 $P(a, b) \in \mathbb{C}^2$ を固定する。

$$Q(P) := \{ f(x, y) \in Q \mid f(a, b) = 0 \}$$

は Q の線型部分空間をなすことを示し、その次元を求めよ。

(3) $\mathbb{C}^2$ の相異なる k 個の点 $P_1(a_1, b_1), \ldots, P_k(a_k, b_k)$ に対し

$$Q(P_1, \ldots, P_k) := \{ f(x, y) \in Q \mid\ 1 \le \forall j \le k,\ f(a_j, b_j) = 0 \}$$

と定めるとき、$Q(P_1, \ldots, P_k)$ の次元は $(\dim Q - k)$ 以上であることを示せ。

(4) $k = 2, 3$ のとき、$\dim Q(P_1, \ldots, P_k) = \dim Q - k$ となることを示せ。

(5) $k = 4$ のとき、$\dim Q(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dim Q - 3$ となるための相異なる 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 に関する必要十分条件を求めよ。

問題 B4: 次の単体から構成される複体 K を考える。

$K^{(0)} = \{|0|, |1|, |2|, |3|, |4|\}$

$K^{(1)} = \{|01|, |02|, |03|, |04|, |12|, |13|, |14|, |23|, |24|, |34|\}$

$K^{(2)} = \{|123|, |124|, |134|, |234|\}$

次の問に答えよ。

(1) $Z_1(K), B_1(K)$ の基底を求め、$H_1(K)$ を計算せよ。

(2) $H_2(K)$ を計算せよ。

問題 B5: 半径 r の球面

$$(u,v) \mapsto (r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, r\sin u)$$

について、
(1) ガウス曲率および平均曲率を求めよ。
(2) 全ての点は臍点（せい点）であることを示せ。
(3) 全ての点は臍点であるような曲面は球面であることを示せ。

問題 B6:

XXXXXXXXX 情報 XXXXXXXX

問題 B7: H を可分な Hilbert 空間、$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ を H の完全正規直交系とし、線形作用素 $T : H \longrightarrow H$ を次式で定義する。

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{k+1} \qquad \left(\ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H\ \right)$$

(1) 任意の $x \in H$ に対して $||Tx|| = ||x||$ が成り立ち、T は有界作用素であることを示せ。また、T の作用素ノルム $||T||$ を求めよ。
(2) T の共役作用素 T^* を求め、$T^*T = I$ が成り立つことを示せ。
(3) T はコンパクト作用素ではないことを示せ。
(4) H の閉部分空間 L を $L = (\ker T^*)^{\perp}$ (ただし、$\ker T^* = \left\{ x \in H \,\middle|\, T^*x = 0 \right\}$ である。) で定める。このとき、T は H と L との同型写像を与えることを示せ。ここで、$T : H \longrightarrow L$ が同型写像とは次の (a), (b), (c) が成り立つことである。
(1) $T : H \longrightarrow L$ は 1 対 1 写像。
(2) $T : H \longrightarrow L$ は上への写像。
(3) $(\,Tx, Ty\,) = (\,x, y\,)\ (\ x, y \in H\ )$

問題 B8: $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$ で正則な関数 $f(z)$ が次の (i), (ii) を満たすとする。
(i) $|f(z)| < 1\ (\ \forall z \in D\ )$,
(ii) 自然数 $n \geq 2$ が存在して $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
(1) 次式で定義される関数 $g(z)$ は D で正則となることを示せ。

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z^{n-1} & z \in D - \{0\}, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

(2) 任意の $0 < r < 1$ に対して、$|g(z)| < 1/r^{n-1}\ (\ |z| \leq r\ )$ が成り立つことを示せ。
(3) 不等式 $|g(z)| < 1\ (\ \forall z \in D\ )$ が成り立つことを示せ。

(4) 不等式 $|f(z)| \leq z^n$ ($\forall z \in D$) が成り立つことを示せ。

(5) (4) の不等式で、ある $z_0 \neq 0$ に対して等号が成立するための必要十分条件は、$f(z) = Az^n$ ($\exists A \in \mathbb{C},\ |A| = 1$) であることを示せ。

問題 B9: 次の放物型方程式の初期境界値問題を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \qquad x \in (\,0,\,1\,), \quad t > 0 \tag{9.1}$$

$$u(0, x) = f(x) \qquad x \in (\,0,\,1\,) \tag{9.2}$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \qquad t > 0 \tag{9.3}$$

(1) 2 階連続微分可能な関数 $u(t, x)$ が (9.1), (9.3) を満たすとき次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dt}\left[\ e^{-2t} \int_0^1 u^2(t, x)\, dx\ \right] \leq 0$$

(2) 初期境界値問題 (9.1)–(9.3) の 2 階連続微分可能な解 $u(t, x)$ に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^1 u^2(t, x)\, dx \leq e^{2t} \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

(3) 初期境界値問題 (9.1)–(9.3) の 2 階連続微分可能な解は存在すればただ 1 つであることを示せ。