平成 14 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程
入学試験 (9 月 6 日 (木) 9:30〜11:30)
数学 I

次の 4 問に解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1: $A \in M_4(\mathbb{C})$ は $A^2 - A + E = O$ を満たすとする。次の問いに答えよ。ただし $M_4(\mathbb{C})$ で複素 4 次行列の全体からなる複素線型空間を表し、E, O でそれぞれ 4 次の単位行列、零行列を表す。

(1) A の固有値は $x^2 - x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) A の成分がすべて実数であるとき、A の固有多項式 $\varphi_A(x) = \det(xE - A)$ を求めよ。

(3) (2) の仮定のもとで、

$$V = \{X \in M_4(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$$

とおくとき、V は $M_4(\mathbb{C})$ の部分空間になることを示し、その次元を求めよ。

問題 2: (X, d) を距離空間とする。A を X の空でない部分集合とし、点 $x \in X$ に対し x と A の距離を

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

により定義する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 各点 $x \in X$ に対し、 $f(x) = d(x, A)$ とおけば、$f : X \to \mathbb{R}$ は連続関数になることを示せ。

(2) 部分集合 $F = \{x \in X \mid d(x, A) \neq 0\}$ は X の開集合となることを示せ。

(3) A, B を空でない互いに交わらない閉集合とするとき、任意の $x \in X$ に対し、常に

$$d(x, A) + d(x, B) > 0$$

であることを示せ。

問題 3: $I = [0, \pi]$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \cos\left(\dfrac{x^2}{2\pi}\right)$ とする。

(1) 平均値の定理を用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

(2) 中間値の定理を用いて、方程式 $f(x) = x$ の解 α が I に存在することを示せ。また、この解は I において唯一つであることを示せ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を $x_{n+1} = f(x_n)$ で定めるとき、任意の初期値 $x_0 \in I$ に対して数列 $\{x_n\}$ は α に収束することを示せ。

問題 4: 定数 $a > 0$ に対して、曲面 S を次式で定義する。

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad (0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$$

(1) S の面積素 $dS = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$ を求めよ。

(2) S の外向き単位法ベクトル $\mathbf{n}$ を求めよ。

(3) ベクトル場 $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, z)$ に対して、面積分 $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS$ の値を求めよ。

平成14年度東京都立大学大学院(理学研究科) 修士課程
入学試験 (9月6日(木) 13:00～15:30)
数学 II

$A1-A3$ **のうち** 1 **問を選択し解答せよ**. **さらに** $B1-B9$ **のうち** 2 **問を選択し解答せよ**. **問題ごとに別の答案用紙を用いよ**.

問題 A1: 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の2次正方行列全体の環を $M_2(\mathbb{Q})$ とする。行列 $A \in M_2(\mathbb{Q})$ に対し

$$R(A) = \{aI + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く。

(1) $R(A)$ は $M_2(\mathbb{Q})$ の可換な部分環であることを示せ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ の場合に次の問いに答えよ。

(2-1) $\alpha = 9$ の場合に自明でない零因子が $R(A)$ 内に存在することを示せ。

(2-2) $R(A)$ が体になるための必要十分条件を与えよ。

問題 A2: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$ とする。$X = f^{-1}(1)$ とおく。$\mathbb{R}^2$ には標準的な位相を入れ、X には $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての相対位相を入れる。

(1) X の概形を描け。

(2) X には可微分多様体の構造が入るか？簡単に理由を付けて答えよ。

(3) M を m 次元可微分多様体とする。M の部分空間 N が M の n 次元可微分部分多様体であることの定義を述べよ。但し、$m > n$ とする。

(4) $\mathbb{R}^2$ に標準的な微分構造を入れる。このとき X は $\mathbb{R}^2$ の可微分部分多様体になるか？簡単に理由を付けて答えよ。

問題 A3: 関数列 $f_n(x)$ を次式で定義する。

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n & 0 < x \le \pi \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(1) 不等式 $\sin x \le x$ ($0 \le x \le \pi$) を示せ。また、等号はいつ成り立つか。

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に $[0, \pi]$ 上、一様収束しないことを示せ。

(4) ルベーグの収束定理を述べよ。

(5) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,dx$ は存在するか。存在するならその値を求めよ。

問題 B1: $\mathbb{R}$ は実数体、$\mathbb{C}$ は複素数体とする。次の 4 つの環について考える。

(1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$　　(2) $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

(3) $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}[x]/(x^2))$　　(4) $\mathbb{R}[x]/(x^3)$

ここで、$\mathbb{R}[x]$ や $\mathbb{R}[y]$ は、$\mathbb{R}$ 上の一変数多項式環であるとする。

(a) 次の環は、それぞれ上の (1) から (4) のどの環と (環として) 同型か？理由を述べて答えよ。

$$\mathbb{R}[y]/(y^3-y),\ \ \mathbb{R}[y]/(y^3+y),\ \ \mathbb{R}[y]/(y^3-1),$$

$$\mathbb{R}[y]/(y^3+1),\ \ \mathbb{R}[y]/(y^3+y^2),\ \ \mathbb{R}[y]/(y^3+3y^2+3y+1)$$

(b) $f(y)$ を $\mathbb{R}[y]$ の元で、y に関して 3 次式であるとする。このとき、環 $\mathbb{R}[y]/(f(y))$ は、上の (1) から (4) のどれかの環と (環として) 同型であることを証明せよ。

問題 B2: p を素数とし、$\mathbb{F}_p$ で p 個の元からなる有限体を表す。

(1) $\sqrt{-1}\in\mathbb{F}_p$ となるために p が満たすべき必要十分条件を求めよ。

(2) 集合 $\{(x,y)\in\mathbb{F}_p^2 \mid x^2+y^2=1\}$ の元の個数を求めよ。

問題 B3: p を 3 以上の素数とし、p 個の元からなる体を $\mathbb{F}_p$ とする．$\mathbb{F}_p$ の元を成分とする 2 行 2 列の行列のうち、行列式が 1 となるものの成す群を $SL_2(\mathbb{F}_p)$ とする。

(1) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ。

(2) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の p-Sylow 群の例を二つあげよ。

(3) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の p-Sylow 群はいくつあるか。理由とともに答えよ。

(4) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ から位数 2 の巡回群への準同型写像をすべて求めよ。

問題 B4: (1) X を $\mathbb{R}^3$ の中の 1 辺の長さが 1 の立方体の頂点と辺からなる 1 次元のグラフ（1 次元の単体複体）とする。X の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

(2) $\epsilon<1/4$ に対し、X の ϵ-近傍 $N_\epsilon(X)$ を

$$N_\epsilon(X)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \exists y\in X, d(x,y)\le\epsilon\}$$

で定める。但し、$d(x,y)=|x-y|$ は $\mathbb{R}^3$ の距離を表すものとする。$N_\epsilon(X)$ の境界 $\partial N_\epsilon(X)$ の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

(3) X と $\partial N_\epsilon(X)$ のオイラー数を求めよ。

問題 B5: 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内にはめ込まれた曲面が、

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v), \quad u \in (0,1), \quad -\infty < v < \infty$$

と表されたとする。但し、$x(u)$ と $y(u)$ は $(x'(u))^2 + (y'(u))^2 \neq 0$ を満たすものとする。

(1) この曲面の単位法ベクトル場、第一基本形式、第二基本形式を求めよ。

(2) この曲面のガウス曲率および平均曲率を求めよ。

(3) 平均曲率が一定ならば、この曲面はどのような曲面になるか？

問題 B6: X を実 Hilbert 空間、$(\ ,\ )$ を X の内積、$\|\ \|$ を X のノルムとする。$A : X \longrightarrow X$ を有界線形作用素とし、A^* を A の共役作用素とする。

(1) $\ker A = \ker(A^*A)$ を示せ。ここで、$\ker A = \left\{ u \in X \;\middle|\; Au = 0 \right\}$ である。

(2) $\alpha > 0$ に対して、

$$(\,u,\, v\,)_\alpha = (\,Au,\, Av\,) + \alpha(\,u,\, v\,) \qquad u,\ v \in X$$

は X 上の内積となることを示し、$\|u\|_\alpha = \sqrt{(\,u,\, u\,)_\alpha}$ は $\|\ \|$ と同値なノルムとなることを示せ。ここで、$\|\ \|_\alpha$ と $\|\ \|$ が同値であるとは、定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して $C_1\|u\| \leq \|u\|_\alpha \leq C_2\|u\|$ ($u \in X$) が成り立つことである。

(3) $K = A^*A + \alpha I : X \longrightarrow X$ (I は恒等作用素) は 1 対 1 の有界線形作用素となることを示せ。

(4) リースの定理を用いて、K は全射であることを示せ。

問題 B7: $f(z)$ は円環領域 $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; r < |z| < R \right\}$ 上正則で、その上で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

とローラン展開される関数とする。

(1) $r < \rho < R$ を満たす ρ に対して、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) $r = 0$ の場合、f が有界ならば、$z = 0$ は f の除去可能な特異点であることを (1) の等式を用いて証明せよ。

(3) $r = 0$ かつ $R = +\infty$ の場合、f が有界ならば、f は定数関数であることを (1) の等式を用いて証明せよ。

問題 B8: 次の波動方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

(1) 変数変換 $p = x - t$, $q = x + t$ によって、方程式 (8.1) はどのような式に変換されるか。

(2) 方程式 (8.1) の一般解を求めよ。

(3) $f(x)$ を 2 階連続微分可能な関数とするとき、初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

を満たす方程式 (8.1) の解を求めよ。

(4) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上積分可能ならば、(3) の解 $u(x, t)$ に対して、積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, dx$ の値は t によらないことを示せ。

問題 B9: 二整数の和や差の計算時間を a, 積の計算時間を m と仮定する。一変数 X の高々 $N-1$ 次の整数係数の二多項式 $f = \sum_{n=0}^{N-1} f_n X^n$, $g = \sum_{n=0}^{N-1} g_n X^n$ の和や差 $f \pm g$ および積 fg を計算する。

(1) 和や差 $f \pm g = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^{\pm} X^n$ (複号同順) を, 式

$$h_n^{\pm} = f_n \pm g_n \text{ (複号同順)} \quad (n = 0, \ldots, N-1)$$

で計算した計算時間を a, N の式で表せ。

(2) 積 $fg = \sum_{n=0}^{2N-2} h_n X^n$ を、 式

$$h_n = \sum_{k=\max(0, n-N+1)}^{\min(N-1, n)} f_k g_{n-k} \quad (n = 0, \ldots, 2N-2)$$

で計算した計算時間を a, m, N の式で表せ。

(3) いま $N = 2M$ が偶数のとき、 高々 $M-1$ 次の整数係数の多項式 f', f'', g', g'' により $f = f' + X^M f''$, $g = g' + X^M g''$ とかき、高々 $M-1$ 次の整数係数の二つの多項式の積の計算時間を m_M とする。問 (1) で多項式の和や差を計算し、 積 $fg = h' + X^M h'' + X^N h'''$ を、式

$$h' = f'g', \quad h''' = f''g'', \quad k = (f' + f'')(g' + g''), \quad h'' = k - h' - h''$$

で計算した計算時間を m_M, a, N の式で表せ。

(4) いま $N = 2^n$ のとき、再帰的に問 (3) で積 fg を計算した計算時間を a, m, N の式で表せ。

(5) もし $m > 3a$ なら、 積 fg の計算時間は N が 2 べきの場合には常に
問 (4) の方が問 (2) の方法より速いことを示せ。

平成 14 年度東京都立大学大学院 (理学研究科) 修士課程
入学試験 (9 月 6 日 (木) 16:00〜17:00)
英語
30 分以降途中退室してもよい

問題 1: 次の英文を和訳せよ。

(1) Without loss of generality we may assume that X is Euclidean space.

(2) The square root of a real number is not necessarily a real number.

(3) Any differentiable function on the real line whose derivative never vanishes has an inverse function.

(4) We shall verify the formula for $n = 2$; whether it is valid for $n > 2$ is an open problem.

(5) It is easy to see that a matrix A with imaginary eigenvalues cannot satisfy the equation $A^2 = A$.

(6) Not all functions are differentiable; in particular $\sqrt{x}$ is not.

問題 2: 次の文の下線部 (7) から (10) まで、それぞれを英訳せよ。

集合 X に記号 $\sim$ で表される関係が定義されているとする。X の任意の元 x, y, z に対し、
($A1$) 反射法則、$x \sim x$
($A2$) 対称法則、$x \sim y$　ならば　$y \sim x$
($A3$) 推移法則、$x \sim y, y \sim z$　ならば　$x \sim z$
が成り立つならば、関係 $\sim$ は同値関係であるという。また、$x \sim y$ であるとき、x と y は同値であるという。例を挙げる。

(7) $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする。

(8) 2 つの整数 m, n の差 $n - m$ は、偶数か奇数である。

(9) いま、$n - m$ が 2 の倍数であるとき $n \sim m$、と関係 $\sim$ を定義する。

この関係 $\sim$ は、上の 3 つの法則をみたすので同値関係であることがわかる。

(10) 偶数同士および奇数同士はおのおの同値である。

しかし、偶数と奇数は同値ではない。