平成１２年度大学院修士課程入学試験（２月１５日）13:00-15:30
数学 II

次の 11 題中 3 題を選択し解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1. $\mathfrak{S}_\ell$ を ℓ 次対称群とする。

(1) $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ を長さ p の巡回置換（cycle）とする時、σ は、$p-1$ 個の互換の積として表されることを示せ。

(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して、

$$k(\sigma) := \min\{m \mid \sigma \text{ は、} m \text{ 個の互換の積として表わされる }\}$$

と定義する。（ただし、$k(1) = 0$ とする。）この時、$\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$ が長さ p の cycle ならば、$k(\sigma) = p-1$ を示せ。

(3)

$$k(\sigma) = \ell - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \text{ は長さ } \ell \text{ の cycle}$$

であることを示せ。

問題 2. $\mathbf{Z}$ を有理整数環、$\mathbf{Z}[x]$ を $\mathbf{Z}$ 上の一変数多項式環とする。$\mathbf{Z}[x]$ の元 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ に対して、$a_0, a_1, \cdots, a_n$ が $\mathbf{Z}$ 内で生成するイデアルが $\mathbf{Z}$ 自身と一致する時、$f(x)$ は原始多項式であると呼ぶ。

(1) $\mathbf{Z}[x]$ の元 $f(x), g(x)$ が共に原始多項式である時、その積 $f(x)g(x)$ も原始多項式であることを証明せよ。

(2) $\mathbf{Z}[x]$ の素イデアル P が、$P \neq (0)$, $P \cap \mathbf{Z} = (0)$ を満たすとする。P の元 $f(x)$ を、$f(x)$ は P の 0 でない元の中で次数が最小でありかつ原始多項式になるように選ぶ。この時、$P = (f(x))$ であることを証明せよ。

(3) $\mathbf{Z}[x]$ の素イデアルは、高々2 個の元で生成されることを証明せよ。

問題 3. $\mathbf{C}$ を複素数体、T, S を変数とする。$K = \mathbf{C}(T^2, S^2)$, $L = \mathbf{C}(T, S)$ とおく。

(1) L/K は、Galois 拡大であることを示し、その Galois 群の構造を求めよ。

(2) $F = K(T+S)$ とする。F/K は Galois 拡大か？　もしそうなら、F/K の、そうでないなら $\tilde{F}$ を F の Galois 閉包とした時の $\tilde{F}/K$ の Galois 群の構造を求めよ。

問題 4. 今 BNF 記法により式を以下のように定義する：

$$\langle\,式\,\rangle ::= \langle\,項\,\rangle | \langle\,式\,\rangle \text{“}+\text{”} \langle\,項\,\rangle | \langle\,式\,\rangle \text{“}-\text{”} \langle\,項\,\rangle$$
$$\langle\,項\,\rangle ::= \langle\,冪\,\rangle | \langle\,項\,\rangle \text{“}\times\text{”} \langle\,冪\,\rangle | \langle\,項\,\rangle \text{“}\div\text{”} \langle\,冪\,\rangle$$
$$\langle\,冪\,\rangle ::= \langle\,素\,\rangle | \langle\,素\,\rangle \text{“\^{}”} \langle\,冪\,\rangle$$
$$\langle\,素\,\rangle ::= \langle\,変\,\rangle | \text{“(”} \langle\,式\,\rangle \text{“)”}$$
$$\langle\,変\,\rangle ::= \text{“}a\text{”} | \text{“}b\text{”} | \ldots | \text{“}z\text{”}$$

(1) 次の各記号列 (a)　$x\hat{}y\hat{}z$, (b)　$(x\hat{}y)\hat{}z$, (c)　$x\hat{}(y\hat{}z)$ は、いずれも式である事を示し、その構文木である二分木が同じになるものを答えよ。
(2) 式 $(a\hat{}b - c) \div (d + e \times f)$ の構文木である二分木を構成せよ。
(3) 問 2 で構成した二分木を前順走査した節点を書き並べよ。
(4) 問 2 で構成した二分木を後順走査した節点を書き並べよ。
(5) 問 4 の解を利用してスタックにより問 2 の式を計算する時のスタックの状態の推移を書け。

問題 5. $\mathbf{C}^2$ の中の曲線

$$C := \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

を考える。

(1) $x = u + v\sqrt{-1}$, $y = s + t\sqrt{-1}$, $u, v, s, t \in \mathbf{R}$ とおき、$\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{R}^2$ と同一視すると、C はどのような方程式で記述されるか？
(2) $p = (u,s), q = (v,t) \in \mathbf{R}^2$ は $(x,y) \in C$ ならば、$p \neq (0,0)$, $p \perp q$ を示せ。
(3) $E := \{(p,q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \|p\| = 1\}$ とする。E は、S^1 とホモトピー同値であることを示せ。
(4) 写像 $\phi : C \longrightarrow E$ を $\phi(x,y) := (p/\|p\|, q)$ で定義する。この時、ϕ は位相同型写像であることを示せ。

問題 6. S^3 を 3 次元球面とする。$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ を $\mathbf{R}^4$ の標準座標系とする。$f : S^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ を,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$$

によって定義された S^3 上の関数とする。

(1) 勾配ベクトル場の定義を説明せよ。上の S^3 上の関数 f の勾配ベクトル場 ∇f を計算せよ。
(2) $(\nabla f)_p = 0$ となるような点 $p \in S^3$ をすべて見つけよ。
(3) S^3 上の関数 g で ∇g が決して零にならないものが存在するか？

問題 7. $\{x, y, z\}$ を $\mathbf{R}^3$ の標準座標系とする。$\mathbf{R}^3$ 上の 1 次微分形式 $\omega = \cos z dx + \sin z dy$ に対して、次を証明せよ。

(1) $\omega \wedge d\omega$ を計算せよ。

(2) 3 次元トーラス T^3 上に 1 次微分形式 η で、$\eta \wedge d\eta$ が至る所零でないものを構成せよ。

問題 8. $\lambda > 0$ は正の実数、F は $[0,1]$ 上の連続関数として、

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \lambda x^2 u(x) + F(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

の解 $u(x)$ を求めることを考える。

(1)

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-x)y \ (0 \leq y \leq x \leq 1) \\ (1-y)x \ (0 \leq x \leq y \leq 1) \end{cases}$$

とおくとき、$u \in C^2[0,1]$ が $(*)$ の解であることと、$u \in C^0[0,1]$ が

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)(\lambda y^2 u(y) + F(y))dy$$

の解であることは同値であることを示せ。

(2) u_0 を任意の $[0,1]$ 上の連続関数として、

$$u_{n+1}(x) = \int_0^1 G(x,y)(\lambda y^2 u_n(y) + F(y))dy \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で帰納的に $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を作る。この時、

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq (\frac{|\lambda|}{16 \cdot 4^{1/3}})^{n-1} \max_{x \in [0,1]} |u_1(x) - u_0(x)| (n \geq 2)$$

を示せ。さらに、これより、$|\lambda| < 16 \cdot 4^{1/3}$ なる時、$\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上で一様収束し、$(*)$ の解が唯一存在することを示せ。

問題 9. 複素関数 f は平面領域 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < +\infty\}$ で正則単葉（単葉とは一対一の意味）しかも $f(D) = D$ とすれば、

$$f(z) \equiv Az, \qquad \text{または} \qquad f(z) \equiv \frac{A}{z},$$

ただし、 A は零でない定数、のいずれかに限ることを証明せよ。

問題 10. ルベーグ可測関数 $f:[0,1]\longrightarrow \mathbf{R}$ の全体を X と表す。$f\in X$ に対して、X の部分集合 $\{g \mid g(x)=f(x) \text{ a.e.}\}$ を $\bar{f}$ と表す。$\mathfrak{X}=\{\bar{f}\mid f\in X\}$ と表す。$\bar{f},\bar{g}\in\mathfrak{X}$ に対して、

$$d(\bar{f},\bar{g})=\int_0^1 \min(|f(x)-g(x)|,1)dx$$

とおく。ただし、$f\in\bar{f}$, $g\in\bar{g}$ とする。

(1) $(\mathfrak{X},d)$ は距離空間であることを示せ。

(2) 関数列 $f_1\in X, f_2\in X,\cdots$ は、

$$\int_0^1 \min(|f_{n+1}(x)-f_n(x)|,1)dx<2^{-n}\quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たすとする。この時、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\infty \text{ a.e.}$$

となること（言い換えると、ほとんどすべての $x\in[0,1]$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|$$

は収束する）を示せ。

(3) 距離空間 $(\mathfrak{X},d)$ は完備であることを示せ。

(4) 関数列 $f_1\in X, f_2\in X,\cdots$ と $f\in X$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \min(|f_n(x)-f(x)|,1)dx=0$$

が成り立つことと、任意の $\varepsilon>0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in[0,1]\ |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$$

が成り立つこととは同値であることを示せ。ただし、$\mu(A)$ は A のルベーグ測度を表す。

問題 11. $(H,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ を可算無限次元ヒルベルト空間とした時、次に答えよ。

(1) $\|e_n\|=1$ で、各 $\xi\in H$ に対して、

$$\langle e_n|\xi\rangle\longrightarrow 0\quad (n\longrightarrow 0)$$

を満たすような $e_n\in H$ $(n\geq 1)$ が存在することを示せ。

(2) $\{\xi\in H \mid \|\xi\|=1\}$ はコンパクトではないことを示せ。