平成１２年度大学院修士課程入学試験（９月２日）10:00-12:00
数学 I

次の 5 題に解答し、問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1. 微分可能な関数 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ は次式を満たすとする：任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対して、

$$f(b) - f(a) = f'(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

(1) f は 2 階微分可能であることを示せ.
(2) f は 2 次以下の多項式であることを示せ.

問題 2. n を自然数、$M_n(\mathbf{C})$ を n 次複素正方行列全体の集合とする. 任意の $A \in M_n(\mathbf{C})$ に対して、次の性質 (1), (2), (3) を満たす行列 $X \in M_n(\mathbf{C})$ の存在および一意性を決定せよ.
(1) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(X)$,
(2) $AX = XA$,
(3) $AXA = A$.

問題 3. 以下に答えよ.
(1) S_r を、(x_0, y_0, z_0) を中心とする半径 r の球面、$\mathbf{n}$ を S_r の外向き単位法ベクトル、$d\sigma$ は S_r の面積要素とする. また、R_r は S_r とその内部からなる球体、V_r はその体積、即ち $V_r = \frac{4}{3}\pi r^3$ とする. $\mathbf{U}$ を点 (x_0, y_0, z_0) の近傍で定義された C^1-級のベクトル場とする時、

$$(\mathrm{div}\mathbf{U})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r \to o} \frac{1}{V_r} \int_{S_r} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

を示せ. さらに、$\mathbf{U}$ を流体の速度ベクトルとして、ベクトル場の発散 div の意味を述べよ.
(2) 空間 $\mathbf{R}^3$ の原点 0 以外で定義されたベクトル場 $\mathbf{A}$ を、

$$\mathbf{A}(x, y, z) := \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

と定める．ここで、$\{x, y, z\}$ を $\mathbf{R}^3$ の標準座標系、$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ を $\mathbf{R}^3$ の基本ベクトルとする．原点を内部に含む区分的になめらかな閉曲面 S 上の、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の面積分

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

の値は、そのような S の取り方に依存しないことを示せ．ここで、$\mathbf{n}$ は S の外向き単位法ベクトル場とする．

問題 4. 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の点を P で、点集合を S で、また、S の境界を ∂S で、S の閉包 $S \cup \partial S$ を $\bar{S}$ で表わす．ここで、 点 P の任意の近傍が S の点と S の補集合の点を必ず含む時、P は S の境界に属すると呼ばれる．この時、以下を示せ．

(1) $P \in \partial S$ かつ $P \notin S$ ならば、P は S の集積点である．

(2) 任意の S に対して、$\overline{S}$ は閉集合である．

(3) 写像 $f_c : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を、$f_c(x, y) := x^2 + cy^2$ と定める．ここで、c は実数の定数とする．このとき、部分集合

$$S = {f_c}^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f_c(x, y) = 1\}$$

のコンパクト性、連結性を決定せよ．

問題 5. $0 < a < b$ とする．

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}$ とする時、重積分

$$\iint_D x^y dxdy$$

の値を求めよ．

(2) 積分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$$

の値を求めよ．

平成１２年度大学院修士課程入学試験（９月２日）13:00-15:30
数学 II

次の 11 題中 3 題を選択し解答せよ. 問題ごとに別の答案用紙を用いよ.

問題 1. G を有限群とする.

(1) $g \in G$ に対して、$\varphi_g : G \longrightarrow G$ を $\varphi_g(x) := g^{-1}xg$ と定義する. φ_g は 自己同型であることを示せ.

(2) G がアーベル群である時、$\tau(x) := x^{-1}$ によって定義される $\tau : G \longrightarrow G$ は G の自己同型であることを証明せよ. G がアーベル群でない時、これは正しいか？

(3) G の位数が 3 以上であるなら、G は必ず非自明な自己同型を持つことを証明せよ.

問題 2. A, B を可換環、$f : A \longrightarrow B$ を準同型写像とする. 次の主張が正しければ証明を与え、正しくなければ反例を挙げよ.

(1) B の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$f^{-1}(\mathfrak{m})$ は A の極大イデアルである.

(2) B の任意の素イデアル $\mathfrak{h}$ に対して、$f^{-1}(\mathfrak{h})$ は A の素イデアルである.

問題 3. a, b を整数（b は平方因子を持たない）とし、4 次方程式 $f(X) = X^4 - 10X^2 + 25 - a^2b = 0$ の有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の分解体を L とする.

(1) 上の方程式の解の集合 S は、$\{\pm x_1, \pm x_2\}$ の形をしていることを示し、x_1, x_2 を根号で表わせ.

(2) ガロア群 $Gal(L/\mathbf{Q})$ が 4 次巡回群 G であるとする時、G の生成元 σ の S への作用を考えることにより、$x_1x_2/\sqrt{b}$ が有理数となることを示せ.

(3) (2) の条件を満たすような、組 (a, b) をすべて求めよ.

問題 4. 自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して、その最大公約数 $\gcd(a, b) \geq 0$ を計算するユークリッド算法 EA について、以下の各問に答えよ. ただし、$b = 0$ の時、$\gcd(a, b) = \gcd(a, 0) = a$ とする.

(1) EA によって $a = 91, b = 35$ の時、$\gcd(a, b)$ を計算する過程を書け.

(2) 一般の EA の手順を正確に述べよ.
(3) 一般の EA が有限回の除法で終了する事（停止性）と計算結果が正しい事（部分正当性）を示せ.
(4) フィボナッチ数列 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$ は、$F_{n+1} \leq 2F_n$ $(n \geq 1)$ を満たす. これを既知として、もし $a \leq F_{n+2}, n \geq 1$ なら EA の除算の回数 $d(a,b)$ は n 以下であることを示せ.
(5) 今、$\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ とすると、$F_{n+2} \geq \alpha^n$ $(n \geq 0)$ である. これを既知として、もし $a > 1$ ならば、

$$d(a,b) \leq \lceil \log_\alpha a \rceil$$

である事を示せ. ただし、実数 x に対して、$\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数（切り上げ関数）とする. できれば、EA の最悪時間計算量は、

$$O(a(\log a)^2(\log\log a))$$

である事を説明せよ.

問題 5. $\mathbf{R}^3$ の部分集合 X, Y_t を、次のように定める：

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\},$$
$$Y_t = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + (z-t)^2 = 1\}.$$

(1) どの実数値 $t \in \mathbf{R}^3$ に対して、$X \cap Y_t$ は $\mathbf{R}^3$ の部分多様体であるか？
(2) t のこれらの値に対して、$\dim X \cap Y_t$ を決定せよ.

問題 6. M を n 次元微分可能多様体とする. このとき、次の問に答えよ.

(1) M のリーマン計量およびシンプレクティック構造の定義とその性質等について知るところを記せ.
(2) g を M 上の C^∞ な 2 次の対称テンソル場とし、次の条件を満たすと仮定する：
  (a) 任意の C^∞ なベクトル場 X に対して、$g(X,X) \geq 0$ となる.
  (b) 任意の C^∞ なベクトル場 X に対して、$g(X,X) \equiv 0$ ならば $X \equiv 0$ となる.

  このとき、g は M 上のリーマン計量を定めるかどうかを理由を付けて答えよ.
(3) (M,ω) を非退化な閉 2 次微分形式 ω を持つシンプレクティク多様体とする. M 上の任意の C^∞-関数 f に対して、ベクトル場 X_f を、

$$df = \omega(X_f, \cdot)$$

によって定める．今、$x \in M$ で $(X_f)_x \neq 0$ と仮定する．この時、x の充分小さい近傍で定義された C^∞-関数 g が存在して、$(df)_x$ と $(dg)_x$ が線型独立かつ $[X_f, X_g] = 0$ が成立することを示せ.

問題 7. (1) 整数係数のホモロジー群は同型になるが、同相にはならないような位相空間の例を挙げよ.

(2) オイラー数の定義を述べよ.

(3) オイラー数は等しくなるが、ホモロジー群は同型にならないような空間の例を挙げよ.

(4) 2 次元閉多様体 X, Y, Z で、それらの $\mathbf{Z}$ 係数ホモロジー群が、以下の (a) 〜 (c) となるものは存在するか？存在する場合は例を挙げ、もし存在しない場合は証明を付けよ.

$$(a) : \begin{cases} H_0(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \\ H_1(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \\ H_2(X;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \\ H_n(X;\mathbf{Z}) = 0 \quad (n \neq 0,1,2) \end{cases}$$

$$(b) : \begin{cases} H_0(Y;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \\ H_1(Y;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \\ H_2(Y;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \\ H_n(Y;\mathbf{Z}) = 0 \quad (n \neq 0,1,2) \end{cases}$$

$$(c) : \begin{cases} H_0(Z;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \\ H_1(Z;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \\ H_2(Z;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \\ H_n(Z;\mathbf{Z}) = 0 \quad (n \neq 0,1,2) \end{cases}$$

(5) (コ) ホモロジー群の係数としては、整数 $\mathbf{Z}$ の他にどのようなものが、どのような目的（状況）で用いられるか、知っていることを簡潔に述べよ.

問題 8. f は単位円板 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 上正則有界で、D 上で $|f(z)| \leq 1$ を満たすとする．　次に答えよ.

(1) $z_1 \in D$, $f(z_1) = 0$ の時、D 上で、

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \right|$$

が成り立つことを示せ.

(2) $z_j, j = 1, 2, \cdots, n$ を重複度に応じて数えた f の零点とする時、D 上で、

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right|$$

が成り立つことを示せ.

(3) f は恒等的に零でないと仮定する. $z_j, j = 1, 2, \cdots$ を重複度に応じて数えた f の零点とする時、$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty$

を示せ.

問題 9. 波動方程式の初期境界値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in (0, \ell), t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

を考える. ただし、$a, b > 0$ 定数で、$g(x)$ は $g(0) = g(\ell) = 0$ となる連続関数である.

(1) 任意の $t > 0$ について、

$$\int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \leq \int_0^\ell g(x)^2 dx$$

となることを示せ.

(2) $g(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ (k : 自然数) の時、解 $u(x, t)$ を求め、$t \to \infty$ のとき、この解がどんな挙動をするか調べよ.

問題 10. $a \in \mathbf{R}^1$ として、$\delta_a(A)$ を $\mathbf{R}^1$ のデルタ測度とする；つまり

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in A, \\ 0 & \text{if } a \notin A. \end{cases}$$

自然数 n に対して、$\mathbf{R}^1$ 上の測度 $\mu_n(A)$ を次で与える：

$$\mu_n(A) := \exp(-\frac{1}{n}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/n)^k}{k!} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=kn}^{(k+1)n-1} \delta_{j/n}(A) \right),$$

ただし、$0! = 1$ とする.

(1) $\mu_n(\mathbf{R}^1) = 1$ を示せ.

(2) $\lambda(dx)$ を $\mathbf{R}^1$ 上の Lebesgue 測度とする. $n \to \infty$ で $\mu_n(dx)$ が $I_{[0,1)}(x)\lambda(dx)$ に弱収束することを示せ. つまり、任意の有界連続関数 f に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(dx) = \int f(x) I_{[0,1)}(x)\lambda(dx)$$

を示せ. ここで、$I_{[0,1)}$ は区間 $[0,1)$ に対する特性関数を表わす.

(3) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \neq \lambda(A \cap [0,1))$ となる Borel 集合 A の存在を示せ.

問題 11. H を Hilbert 空間、$(\ ,\ )$ を H の内積、$\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ を H の完全正規直交基底とする. 整数 n に対して、線型作用素 $T_n : H \longrightarrow H$ を次で定める.

$$T_n e_i := \begin{cases} e_{i+n} & \text{if } \ i \geq -n, \\ 0 & \text{if } \ i < -n. \end{cases}$$

(1) T_n^* を T_n の共役作用素、即ち、$(T_n x, y) = (x, T_n^* y)$ $(x, y \in H)$ を満たすものとする時、$T_n^* = T_{-n}$ であることを示せ.

(2) T_n の指数 $i(T_n) := \dim(\mathrm{Ker} T_n) - \dim(\mathrm{Ker} T_n^*)$ を求めよ. ここで、H 上の線形作用素 T に対して、$\mathrm{Ker}T$ は部分空間 $\left\{ x \in H \,\middle|\, Tx = 0 \right\}$ を表すものとする.

(3) T_n の作用素ノルムを、$\|T_n\|$ とする時、$\|T_n\| = 1$ であることを示せ.