平成１１年度大学院修士課程入学試験 （２月１６日）10:00-12:00
数学

次の５問に解答し、問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & q_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & q_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{n-2} & q_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x_{n-1} & q_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

に対して、$\det(A-\lambda I)$ の λ^k の係数を O_n^k で表すとき、次の問いに答えよ。

(i) O_n^n を求めよ。

(ii) O_n^{n-1} を求めよ。

(iii) $O_n^k = -O_{n-1}^{k-1} + x_n O_{n-1}^k - q_{n-1} O_{n-2}^k$ を証明せよ。

(iv) O_n^{n-2} を求めよ。

2. d, n を自然数、$\mathbb{R}$ を実数体とし、$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を $\mathbb{R}$ 上の d 次元列ベクトルとする。線形写像 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ を、$f(\mathbf{b}) = ({}^t\mathbf{b}\mathbf{a}_1, \ldots, {}^t\mathbf{b}\mathbf{a}_n)$ と定義する。ここで、$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ は d 次元列ベクトルである。今、$\mathrm{rank}(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) = d$ と仮定する。このとき、

(i) f は単射であることを証明せよ。

次に、$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbf{v}$ の support を

$$supp(\mathbf{v}) = \{i \mid v_i \neq 0\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

と定義する。$f(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ の中で、support が極小である元を circuit と呼ぶ。また、$\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ に対して、

$$L(\mathbf{b}) = \{\mathbf{a}_i \mid {}^t\mathbf{b}\mathbf{a}_i = \mathbf{0}\}$$

とおく。このとき

(ii)

$$L(\mathbf{b}) = \{\mathbf{a}_i \mid i \in \{1, \ldots, n\} \setminus supp(f(\mathbf{b}))\}$$

を証明せよ。

(iii) $L(\mathbf{b})$ で張られる $\mathbb{R}^d$ の部分空間を $W(\mathbf{b})$ とするとき $f(\mathbf{b})$ が circuit であるための必要十分条件は、$\dim W(\mathbf{b}) = d-1$ であることを証明せよ。

(iv) $(v_1, \ldots, v_n)$ が circuit であると仮定する。このとき、$1 \le k_1 < \cdots < k_{d-1} \le n$ をみたす整数 $k_1, \ldots, k_{d-1}$ と 0 でない実数 c があって、各 i に対して、

$$v_i = c \cdot \det(\mathbf{a}_{k_1} \cdots \mathbf{a}_{k_{d-1}}\ \mathbf{a}_i)$$

が成立することを証明せよ。

3. f を有界区間 I 上の実数値連続関数とする。

(i) I が閉区間であるとき、f は I の元からなる任意の Cauchy 列 $\{x_n\}$ を Cauchy 列に写すことを示せ。

(ii) I が閉区間でないとき、(i) の結論は成り立つか？成り立つときにはその証明を、成り立たないときにはその例を与えよ。

4. $k > 0$ とせよ。以下の級数は、k のどのような値に対して、絶対収束、条件収束、あるいは、発散するか？理由とともに述べよ。

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

5. (i) 次の重積分の値を求めよ。

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2}\, dxdy\,.$$

(ii) (i) の結果を用いて、次式を示せ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

（以上）

平成１１年度大学院修士課程入学試験 （２月１６日）13:00-15:30
数学 II

次の１１問中３問を選択し解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

1. 群 G の交換子群を $[G,G]$ で表す。このとき

(i) G の正規部分群 H について、「G/H がアーベル群であること」と、「H が $[G,G]$ を含む」とが同値であることを証明せよ。

$n \geq 2$ とし、$\mathcal{S}_n$ を n 次対称群、$\mathcal{A}_n$ を n 次交代群とする。このとき、

(ii) $[\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n] = \mathcal{A}_n$ を証明せよ。

(iii) $\mathcal{S}_n$ の指数 2 の部分群は $\mathcal{A}_n$ のみであることを証明せよ。

2. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の１変数 X についての多項式環を $R = \mathbb{Z}[X]$ とする。また，p と q を相異なる奇素数とし，$I := (pq, X^p - q)$ を pq と $X^p - q$ が生成する R のイデアルとする．このとき，

(i) I を含む R の極大イデアルをすべて与えよ。

(ii) これらの極大イデアルの各々について，それによる R の剰余体は何であるかを答えよ。

3. 次の各問に答えよ。

(i) 群 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ と群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は群として同型か。(証明をつけて答えよ。)

(ii) 有理数体 $\mathbb{Q}$ のガロア拡大体 L のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ に同型であるとする。このとき、$L \supset \mathbb{Q}(\sqrt{c})$ (ここで c は有理数) ならば、c は非負の有理数であることが必要であることを示せ。

(iii) (ii) の条件をみたすような L および c の具体例を与えよ。

4. 算術式 $((a+b)-c)*(d/(e-f)+g)$ に対し以下の各問に答えよ。

(i) 与えられた算術式の解析木である二分木を構成せよ。

(ii) (i) で構成した二分木を後順走査した節点を書き並べよ。

(iii) (i) で構成した二分木を間順走査した節点を書き並べよ。

(iv) 与えられた算術式と式の値は等しい算術式で, その解析木は (i) の解と異り, それを間順走査した節点を書き並べると (ii) の解と同じになる算術式を書け。

(v) 括弧記号 (,), 被演算子 a, b, c, d, e, f, g, 演算子 $+$, $-$, $*$, $/$ を, 与えられた算術式の左からキューに一文字づつ挿入し, もし被演算子が挿入された場合はキューから一文字削除する時のキューの最終状態を書け。

(vi) (ii) の解を利用してスタックにより与式を計算するときのスタックの状態の推移を書け。

5. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の常らせん面

$$S : x = u\cos(v), y = u\sin(v), z = v \quad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

について、以下の問に答えよ。

(i) 曲面 S の第一基本形式および第二基本形式、単位法ベクトル場を求めよ.

(ii) 曲面 S のガウス曲率および平均曲率を求めよ.

(iii) (ii) の結果によると、S はどのような特徴を持つ曲面か？

(iv) S のガウス写像の像は、2 次元球面上のどのような部分集合になるか？

6. $\mathbb{R}^3$ を 3 次元ユークリッド空間とする。$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ を $\mathbb{R}^3$ の任意の基底とする。Γ を $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ によって $\mathbb{Z}$ 上で生成される加群とする。すなわち、

$$\Gamma := \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b} + \mathbb{Z}\mathbf{c}$$

とする。このとき、次の問に答えよ。

(i) 商空間 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ は、連結コンパクト 3 次元多様体であることを証明せよ。

(ii) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ および $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ を $\mathbb{R}^3$ の二つの基底とし、それぞれが $\mathbb{Z}$ 上で生成する加群を Γ_1, Γ_2 によって表す。このとき、二つの商空間 $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$、$\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ は、微分同相であることを示せ。

(iii) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平坦な標準リーマン計量から誘導されたリーマン計量を商空間 $\mathbb{R}^3/\Gamma$ に定める。このとき、二つの商空間 $\mathbb{R}^3/\Gamma_1$、$\mathbb{R}^3/\Gamma_2$ が等長同型であるための十分条件を一つ与えよ。(理由をつけて答えよ。)

7. 図のような穴の二つあいた浮き輪で、中身のつまったものを X とおく。

(i) X の整数係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbb{Z})$ を求めよ。

(ii) $\mathbb{R}^3 \setminus X$ の整数係数ホモロジー群 $H_*(\mathbb{R}^3 \setminus X;\mathbb{Z})$ を求めよ。

(iii) P を X の内点とする。$X \setminus \{P\}$ の整数係数ホモロジー群を求めよ。

8. (1) $f(z)$ を $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上正則で、 Δ_R 上で

$$\mathrm{Re} f(z) \le M$$

を満たす関数とする。ただし、M は正の定数とする。このとき次のことを示せ。

(i) Δ_R 上で、$|f(z)| \le |2M - f(z)|$ が成立する。

(ii) $f(0) = 0$ のとき、Δ_R 上で、

$$|f(z)| \le \frac{2M|z|}{R - |z|}$$

が成立する。

(iii) Δ_R 上で、

$$|f(z)| \le \frac{2M|z|}{R - |z|} + \frac{R + |z|}{R - |z|}|f(0)|$$

が成立する。

(2) $f(z)$ が全複素平面上正則で、ある定数 M に対して

$$\mathrm{Re} f(z) \le M$$

を満たせば、$f(z)$ は定数であることを証明せよ。

9. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は有限測度空間として, φ, ψ は可積分関数とする。すべての $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \psi d\mu$$

であるとする。このとき, 次が成り立つことを示せ。

(i) $\displaystyle\int_X |\varphi - \psi| d\mu = 0,$

(ii) $\mu(\{x \in X \mid |\varphi - \psi| > 0\}) = 0,$

(iii) $\varphi = \psi \quad \mu$-a.e.

10. H は実ヒルベルト空間とし、x, $y \in H$ の内積を (x, y) と表し、$x \in H$ のノルムを $\|x\|$ と表す。M は H の閉部分空間とする。

(i) x, $y \in H$ に対する等式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

を示せ。

(ii) $x \in H$ に対して、

$$(*) \qquad \|z - x\| = \inf\{\|m - x\| \mid m \in M\}$$

となる $z \in M$ が存在することを示せ。

(iii) 各 $x \in H$ に対して、$(*)$ を満たす $z \in M$ はただ一つであることを示せ。

(iv) $x \in H$ とし、$z \in M$ は $(*)$ を満たすものとする。$m \in M$ に対して $(x - z, m) = 0$ が成立することを示せ。

11. $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の二階連続微分可能な関数として、次の偏微分方程式の初期値問題を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad (\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\ )\,, \tag{11.1}$$

$$u(0,x) = f(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0\,. \tag{11.2}$$

(i) $\mathbb{R}$ 上の二階連続微分可能な関数 Φ, Ψ を用いて関数 $u(t,x)$ を $u(t,x) = \Phi(x-t) + \Psi(x+t)$ で定義するとき、$u(t,x)$ は方程式 (11.1) を満たすことを示せ。

(ii) 前問の形の (11.1) の解 $u(t,x)$ が初期条件 (11.2) を満たすように関数 Φ, Ψ を定めよ。

(iii) (ii) で求めた解 $u(t,x)$ において、$f(x)$ を $f(x) > 0$ ($|x| < 1$), $f(x) = 0$ ($|x| \geq 1$) を満たすようにえらんだとき、$t > 0$ に対して集合

$$S_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; u(t,x) > 0 \right\},$$

を求めよ。

（以上）