平成１１年度大学院修士課程入学試験（９月３日）10:00-12:00

数学

次の５問に解答し、問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

1. n, k を自然数とする。k 乗して単位行列になる n 次複素正方行列全体の集合を $F_{n,k}$ とおく。このとき、次の問に答えよ。

(1) $A, B \in F_{n,k}$ に対して、$B = L^{-1}AL$ を満たす n 次複素正則行列 L が存在するとき、$A \sim B$ と書く。このとき、$\sim$ は $F_{n,k}$ 上の同値関係を定めることを示せ。

(2) $F_{n,k}$ に含まれる行列は対角化可能であることを証明せよ。

(3) 同値関係 $\sim$ に関する商集合 $F_{n,k}/\sim$ の元の個数を求めよ。

2. X を 2×2-複素行列 とする。

(1)

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} X^n$$

とする。$k \to \infty$ のときに、A_k の各成分が収束することを示せ。

(2) (1) によって存在の保証された極限行列を $\exp X$ と表すとき、

$$\exp X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となるような 2×2-複素行列 X を一つ求めよ。

3. 高々 2 次の実数係数多項式全体からなる実ベクトル空間を V とおく。V 上の内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

と定義する。

(1) 上の内積に関する V の正規直交基底を一組求めよ。

(2) $f(t) = t^2 + bt + c \in V$ (ただし、b, c は実数) で (f, f) が最小になるものを求めよ。

4. (1) 開区間 $I = (a, b)$ で定義された微分可能関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が高々有限個の点を除いて常に 0 であると仮定する。このとき、$f(x)$ は I 上の定数関数であることを示せ。

(2) k を 2 以上の自然数とする。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ もまた絶対収束することを示せ。

5. $p > 1, t > 0$ に対して、

$$I_t = \int_0^t e^{-(p-1)s} \{ \int_0^s e^r dr \}^p ds$$

とするとき、

(1)

$$e^t - 1 - pt \leq I_t \leq e^t - 1$$

を示せ。

(2)

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t} I_t$$

を求めよ。

（以上）

平成１１年度大学院修士課程入学試験（９月３日）13:00-15:30

数学 II

次の１１問中３問を選択し解答せよ。問題ごとに別の答案用紙を用いよ。

1. M は加法群 (演算を $+$ と表したアーベル群) とする。n は自然数であるとする。このとき、$nM = \{nx \mid x \in M\}$ と定義する。

(1) nM は M の部分群であることを証明せよ。

(2) $\mathbb{Z}$ は、整数全体からなる加法群、m は n と互いに素な自然数とする。$M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ であるとき、$nM = M$ であることを証明せよ。

(3) M は有限生成加法群、p は素数とする。$p^k M/p^{k+1}M$ の元の数を $\phi(p,k)$ とおく。k が十分大きいとき、$\log_p \phi(p,k)$ は M の階数 (M に含まれる極大な自由部分加群の階数) に等しいことを証明せよ。

2. 整数環を $\mathbb{Z}$ で表わす。平方数でない整数 d に対して、複素数体 $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ を考える。この環の元 $\alpha = m + n\sqrt{d}$ に対して $N(\alpha) = m^2 - dn^2$ と定義するとき次を示せ。

(1) 任意の α, β に対し $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2) α が $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ の乗法に関する可逆元である為の必要十分条件は $N(\alpha) = 1$ 又は -1 である。

(3) $1 + \sqrt{-5}$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約元であるが、素元ではないことを証明せよ。

3. p を素数とし、p 個の元からなる有限体 $\mathbf{F}_p$ を考える。

(1) 多項式 $T^2 + T + 1$ が $\mathbf{F}_p$ で既約であるための p の必要十分条件を求めよ。

(2) 多項式 $T^6 + T^3 + 1$ が $\mathbf{F}_p$ で既約であるための p の必要十分条件を求めよ。

4. 任意の２実数の加減算と乗算の最大時間計算量を、それぞれ a と m とする。また、M_N を N 次実正方行列全体とする。このとき $X, Y \in M_N$ に対して、積 $Z = XY$ を計算する。

(1) $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Z = (z_{ij})$ としたとき、定義式

$$z_{ij} := x_{i1}y_{1j} + \cdots + x_{iN}y_{Nj} \quad (i, j \in \{1, \ldots, N\})$$

を直接用いた場合の最大時間計算量 m_N を a, m, N の式で表せ。

(2) $N = 2^n \ \ (n > 0)$ の場合、$X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} \in M_{N/2} \ \ (i, j \in \{1, 2\})$ により、

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

と区分けして、$i' = 3 - i \ \ (i \in \{1, 2\})$ と置いて、順次に公式

$$A_i := X_{ii}(Y_{ii'} + Y_{i'i'}), \quad B_i := (X_{ii'} - X_{ii})Y_{i'i'} \quad (i \in \{1, 2\})$$

$$Z_{ii'} := A_i + B_i \quad (i \in \{1, 2\}), \quad D := (X_{11} + X_{22})(Y_{11} + Y_{22})$$

$$C_i := (X_{ii'} + X_{i'i'})(Y_{i'i} - Y_{i'i'}), \quad Z_{ii} := D + C_i + B_i - A_{i'} \quad (i \in \{1, 2\})$$

を用いて M_N の計算を $M_{N/2}$ の計算に帰着できる。この公式をくりかえし M_{2^k} $(k \in \{1, \ldots, n\})$ に対して用いた場合の最大計算時間量 s_N は

$$s_N = 7s_{N/2} + \frac{9}{2}aN^2 \quad (N > 1), \qquad s_1 = m$$

という漸化式をみたすことを示せ。また、この漸化式を解いて、

$$s_N = (m + 6a)N^{\log_2 7} - 6aN^2 = O(N^{\log_2 7}) \quad (N \to \infty)$$

となることを証明せよ。

(3) $m > 14a$ のとき、$m_N > s_N$ $(N = 2^n, n > 0)$ を示せ。

5. （1）3 次元 Euclid 空間内の

$$e^z \cos x = \cos y$$

で与えられる曲面の Gauss 曲率，平均曲率を求めよ.

（2）

$$z = f(x) + g(y)$$

の形の極小曲面を求めよ.

6. M を n 次元微分可能多様体とする。

(1)M 上の C^∞ 級ベクトル場、その積分曲線、１径数変換群の定義、およびそれらの関係について述べよ。

(2)X を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする。M の点 x において $(X)_x \neq 0$ と仮定する。このとき、x の周りの局所座標系 $(U, \{x^1, \ldots, x^n\})$ で、U 上で $X = (\frac{\partial}{\partial x^1})$ となるものが取れることを示せ。

(3)$\mathbf{R}^2$ の 2 つの元 $(1,0), (a,b)$ $(b > 0)$ によって $\mathbb{Z}$ 上生成される離散部分群を Γ とする。商多様体 $M = \mathbf{R}^2/\Gamma$ は、トーラス面とよばれる。$\mathbf{R}^2$ の標準座標系を $\{x, y\}$ とするとき、M 上の次の 2 次微分形式の積分を計算せよ。

(3a) $\int_M dx \wedge dy$,

(3b) $\int_M \cos(\frac{2\pi y}{b}) dx \wedge dy$.

7. $\mathbf{R}^3$ の原点中心半径 1 の球面と半径 2 の球面、およびそれらの間のアニュラス（円環面）からなる空間を X とする。すなわち、

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \\ &\quad \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0, \ \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}. \end{aligned}$$

このとき、X の $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群 $H_*(X; \mathbb{Z})$ を求めよ。

8. 集合 $D = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ で正則な関数 f で

$$\lim_{z \to 0} z f'(z) = 1$$

をみたすものは存在しないことを証明せよ。

9. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は確率空間とする。$f_1, f_2, \dots, f$ は X 上の実数値可測関数として、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$A_{n,\epsilon} = \{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$$

とおく。このとき、次の (1), (2) を示せ。

(1)

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n(x) - f(x)| \, d\mu = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_{n,\epsilon}) = 0.$$

(2)

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \mu(A_{n,\epsilon}) = 0 \Longrightarrow$ 部分列 $\{f_{n_j}\}$ が存在して、$\displaystyle\lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x) = f(x) \quad \mu-$a.e.

10. 区間 $I = [\,0, 1\,]$ 上の実数値連続関数全体の空間 $C(I)$ に対して、線型作用素 $K : C(I) \to C(I)$ を次式で定義する。

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) \, dy$$

ここで、

$$k(x, y) = \min\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \le y, \\ y & \text{if} \quad x \ge y. \end{cases}$$

(1) $u = Kf$ は 2 階連続微分可能で、$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -f(x)$ を満たすことを示せ。

(2) K に対する固有値問題 $Kf = \lambda f$ は常微分方程式の境界値問題

$$\lambda \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -u(x) \quad x \in (\,0, 1\,), \qquad u(0) = 0\,, \quad \frac{du}{dx}(1) = 0\,.$$

と同値であることを示せ。

(3) 作用素 K の固有値と固有関数をすべて求めよ。

11. H は $\mathbf{R}$ 上のヒルベルト空間とし、$\{e_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ はその正規直交系とする。$x, y \in H$ とするとき、x のノルムを $\|x\|$ と表し、x, y の内積を (x, y) と表す。

$$B = \{x \in H \mid \|x\| \le 2\}$$

と表す。$f : B \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \inf_{i \in \mathbf{N}} \left(\|x - e_i\| + \frac{1}{i} \right)$$

と定義する。つぎの問いに答よ。

(1) $i, j \in \mathbf{N}, i \ne j$ に対して、$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ となることを示せ。

(2) f は B 上で連続であることを示せ。

(3) f は B 上で最小値をとらないことを示せ。

(4) (2) と (3) から B はコンパクトでないことを示せ。

（以上）