p 進多重 L 関数の構成とその値について

古庄 英和（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）
津村 博文（首都大学東京大学院理工学研究科）

この報告は, 著者による二つの講演 ‘p 進多重 L 関数の構成とその値について (I), (II)’ の内容を一つにまとめたものである. 証明などの詳細に関しては, 小森靖氏, 松本耕二氏との共著論文 [3], [5] を参照してほしい.

1. Notation

以下, p を素数として, $|\cdot| = |\cdot|_p$ を p 進絶対値, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環, $\mathbb{Q}_p$ を p 進数体, $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) := \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, $|\infty|_p = \infty$ とする. $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ に対し, $]\bar{x}[$ を x を中心とする単位開円盤とする (ただし $\bar{x}$ は x の剰余類). さらに μ_m を 1 の m 乗根全体からなる乗法群とする. また $\mathbb{Z}_p^\times$ を p 進単数群 ($\subset \mathbb{Z}_p$) として

$$W := \begin{cases} \{\pm 1\} & (p=2) \\ 1\text{ の }(p-1)\text{ 乗根全体} & (p \geq 3) \end{cases}$$

$$q := \begin{cases} 4 & (p=2) \\ p & (p \geq 3) \end{cases}$$

とおくと, W は $(\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)^\times \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ の完全代表系であり

$$\mathbb{Z}_p^\times = W \times (1 + q\mathbb{Z}_p)\,;\ x = \omega(x) \cdot \langle x \rangle,$$

ここで ω は Teichmüller 指標, すなわち

$$\omega\ :\ (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to W(\subset \mathbb{Z}_p^\times);\ \omega(m) \equiv m \pmod{q\mathbb{Z}_p}$$

によって, 導手が q の原始的 Dirichlet 指標と見られる.

2. Kubota-Leopoldt p-adic L 関数

以下, Koblitz [4] に従って, Kubota-Leopoldt p-adic L 関数の構成を復習する. Dirichlet 指標 χ について, Dirichlet L 関数を

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

とおくと

$$L(1-n,\chi)=-\frac{B_{n,\chi}}{n}\quad (n\in\mathbb{N}),$$

ただし $\{B_{n,\chi}\}$ は一般 Bernoulli 数であり

$$\sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}$$

で定義される.

ここで $\mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度を定義する.

$$\Omega:=\left\{j+p^k\mathbb{Z}_p \,|\, k\in\mathbb{N};\ 0\le j<p^k\right\}$$

とおくと, これは $\mathbb{Z}_p$ のコンパクト開集合族 (Open basis) となる. このとき $\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)\setminus]\bar{1}[$ について, Koblitz の p 進測度 $\mathfrak{m}_\alpha:\Omega\to\mathbb{Z}_p$ を

$$\mathfrak{m}_\alpha\left(j+p^N\mathbb{Z}_p\right)=\frac{\alpha^j}{1-\alpha^{p^N}}\quad (0\le j<p^N)$$

によって定義する. このとき, 連続関数 $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ について p 進積分

$$\int_{\mathbb{Z}_p}f(x)d\mathfrak{m}_\alpha(x):=\lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{p^N-1}f(a)\mathfrak{m}_\alpha\left(a+p^N\mathbb{Z}_p\right)$$

が定義される.

ここで $c\in\mathbb{N}_{\ge 2}$ (ただし $(c,p)=1$) をとって

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_c\left(j+p^N\mathbb{Z}_p\right)=\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{C}_p\setminus\{1\}\\ \xi^c=1}}\mathfrak{m}_\xi\left(j+p^N\mathbb{Z}_p\right)=\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{C}_p\setminus\{1\}\\ \xi^c=1}}\frac{\xi^j}{1-\xi^{p^N}}$$

とおく. これは本質的に Mazur の p 進測度である. このとき Bernoulli 数の p 進補間として

$$\int_{\mathbb{Z}_p}x^m d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x)=\left(1-c^{m+1}\right)\frac{B_{m+1}}{m+1}\qquad (m\ge 1),$$

一般に

$$\int_{\mathbb{Z}_p}x^m\omega^k(x)d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x)=\left(1-c^{m+1}\omega^k(c)\right)\frac{B_{m+1,\omega^k}}{m+1}\qquad (m\ge 1)$$

が得られる.

Definition 2.1 (Kubota-Leopoldt p 進 L 関数)**.** $s\in\mathbb{C}_p$ $\left(|s|<qp^{-1/(p-1)}\right)$ について

$$\begin{aligned}L_p(s;\omega^k)&=\frac{1}{\langle c\rangle^{1-s}\omega^k(c)-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\langle x\rangle^{-s}\omega^{k-1}(x)d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x)\\&=\frac{1}{\langle c\rangle^{1-s}\omega^k(c)-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{a=1\\ p\nmid a}}^{p^N-1}\langle a\rangle^{-s}\omega^{k-1}(a)\widetilde{\mathfrak{m}}_c(a+p^N\mathbb{Z}_p).\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} L_p(1-m;\omega^k) &= \left(1-\omega^{k-m}(p)p^{m-1}\right) L\left(1-m,\omega^{m-k}\right) \\ &= -\left(1-\omega^{k-m}(p)p^{m-1}\right)\frac{B_{m,\omega^{m-k}}}{m} \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ.

3. 二重 L 関数

ここで (複素) 二重 L 関数を考察する.

Definition 3.1 (二重 L 関数)**.** Dirichlet 指標 χ_1, χ_2, $\tau \in \mathbb{C}$ ($\Re\tau > 0$) について

$$L_2(s_1, s_2; \chi_1, \chi_2; \tau) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m)\chi_2(n)}{m^{s_1}(m+n\tau)^{s_2}}$$

によって, 二重 L 関数を定義する. この級数は $\Re s_2 > 1$, $\Re s_1 + \Re s_2 > 2$ において絶対収束する.

Remark 3.2. まず $\tau = 1$, $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$ の場合について, 荒川-金子 [1] によって考察された. さらに松本-谷川 [6] によって, $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ として有理型に解析接続されることが示された. 実際, [1,6] では, 一般の多重 L 関数について考察されている.

近年, 小森-松本-津村 [5] によって, 次のような関数等式が示された.

Theorem 3.3 (関数等式)**.** 導手 $f(>1)$ の原始的 Dirichlet 指標 χ_1, χ_2 に対し

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2\pi i}{f\tau}\right)^{\frac{1-s_1-s_2}{2}}\frac{\Gamma(s_2)}{\tau(\chi_1)}L_2(s_1, s_2; \chi_1, \chi_2; \tau) \\ &\quad = \left(\frac{2\pi i}{f\tau}\right)^{\frac{s_1+s_2-1}{2}}\frac{\Gamma(1-s_1)}{\tau(\overline{\chi}_2)}L_2(1-s_2, 1-s_1; \overline{\chi}_2, \overline{\chi}_1; \tau) \end{aligned}$$

がそれぞれ次の超平面上で成り立つ：

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (if } \chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1); \\ s_1 + s_2 &= 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (if } \chi_1(-1)\chi_2(-1) = -1). \end{aligned}$$

Corollary 3.4. 導手 $f(>1)$ の原始指標 χ_1, χ_2, $m, n \in \mathbb{N}$ に対し, $2k \geq m$, $2k-1 \geq n$ となる $k \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned} L_2(m-2k, 1-m; \chi_1, \chi_2; \tau) &= 0 \quad \text{(if } \chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1), \\ L_2(n+1-2k, 1-n; \chi_1, \chi_2; \tau) &= 0 \quad \text{(if } \chi_1(-1)\chi_2(-1) = -1). \end{aligned}$$

これらは L_2 の **trivial-zeros** と見られる.

Remark 3.5. 単位指標を χ_0 とかくとき, 原始指標 $\chi_1 \neq \chi_0$, $\chi_2 = \chi_0$ をとる. $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ について $m+n$ が奇数 (resp. 偶数) (if $\chi_1(-1) = 1$ (resp. $= -1$)) を満たすとき

$$L_2(-m, -n; \chi_1, \chi_0; \tau) = \frac{(-1)^{m+n+1}}{2f} \frac{B_{m+n+1,\chi_1}}{m+n+1}$$

が成り立つ. この値は τ の取り方によらない.

4. p 進多重 L 関数の定義

前節の考察をもとにして, その p 進類似および多重化を構成する.

$r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ として, $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_r \in \mathbb{Z}_p$ に対し,

$$\left(\mathbb{Z}_p^r\right)'_{\eta_2,\ldots,\eta_r} := \left\{ (x_j) \in \mathbb{Z}_p^r \,\middle|\, p \nmid x_1,\ p \nmid (x_1 + x_2\eta_2), \ldots \right. \\ \left. \ldots,\ p \nmid (x_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_r\eta_r) \right\}$$

とおく.

Definition 4.1 (p 進多重 L 関数)**.** $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C}_p$ ($|s_j| < qp^{-1/(p-1)}$ $(1 \leq j \leq r)$), $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned} &L_{p,r}(s_1, \ldots, s_r; \omega^{k_1}, \ldots, \omega^{k_r}; \eta_2, \ldots, \eta_r; c) \\ &:= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^r\right)'_{\eta_2,\ldots,\eta_r}} \langle x_1 \rangle^{-s_1} \langle x_1 + x_2\eta_2 \rangle^{-s_2} \cdots \langle x_1 + \sum_{j=2}^r x_j\eta_j \rangle^{-s_r} \\ &\qquad \times \omega^{k_1}(x_1) \cdots \omega^{k_r}(x_1 + \sum_{j=2}^r x_j\eta_j) d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x_1) \cdots d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x_r). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Remark 4.2. $L_{p,r}(s_1, \ldots, s_r; \omega^{k_1}, \ldots, \omega^{k_r}; \eta_2, \ldots, \eta_r; c)$ は,

$$\left\{ (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}_p^r \,\middle|\, |s_1|, \ldots, |s_r| < qp^{-1/(p-1)} \right\}$$

において連続, かつ各変数に関して p 進解析的である.

5. p 進二重 L 関数の性質

以下, p 進二重 L 関数を考察する. $\eta \in \mathbb{Z}_p$ に対し

$$\left(\mathbb{Z}_p^2\right)'_\eta := \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}_p^2 \,\middle|\, p \nmid x,\ p \nmid (x + y\eta) \right\}$$

とおき, $(c,p)=1$ となる $c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ を固定すると, p 進二重 L 関数が,

$$\begin{aligned}
&L_{p,2}(s_1,s_2;\omega^k,\omega^l;\eta;c)\\
&:= \int_{(\mathbb{Z}_p^2)'_\eta} \langle x\rangle^{-s_1}\langle x+y\eta\rangle^{-s_2}\omega^k(x)\omega^l(x+y\eta)d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(x)d\widetilde{\mathfrak{m}}_c(y)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{a=1\\ p\nmid a}}^{p^N-1}\sum_{\substack{b=0\\ p\nmid(a+b\eta)}}^{p^N-1}\langle a\rangle^{-s_1}\langle a+b\eta\rangle^{-s_2}\omega^k(a)\omega^l(a+b\eta)\widetilde{\mathfrak{m}}_c(a+p^N\mathbb{Z}_p)\,\widetilde{\mathfrak{m}}_c(b+p^N\mathbb{Z}_p)
\end{aligned}$$

によって定義される. そこで $z \in \mathbb{C}_p\diagdown]\bar{1}[$ について

$$\mathfrak{H}(t;z) := \frac{1}{1-ze^t} = \int_{\mathbb{Z}_p} e^{tx}d\mathfrak{m}_z(x) \tag{5.1}$$

とおき, $\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{C}_p\diagdown]\bar{1}[$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_2(t_1,t_2;\xi_1,\xi_2;\gamma) &:= \mathfrak{H}(t_1+t_2;\xi_1)\mathfrak{H}(\gamma t_2;\xi_2)\\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\beta(n_1,n_2;\xi_1,\xi_2;\gamma)\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\frac{t_2^{n_2}}{n_2!}
\end{aligned}$$

とおくと (5.1) から

$$\mathfrak{H}_2(t_1,t_2;\xi_1,\xi_2;\gamma) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} e^{xt_1+(x+y\gamma)t_2}d\mathfrak{m}_{\xi_1}(x)d\mathfrak{m}_{\xi_2}(y).$$

よって

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} x^{n_1}(x+y\gamma)^{n_2}d\mathfrak{m}_{\xi_1}(x)d\mathfrak{m}_{\xi_2}(y) = \beta(n_1,n_2;\xi_1,\xi_2;\gamma) \quad (n_1,n_2\in\mathbb{N}_0). \tag{5.2}$$

これより p 進二重 L 関数の負の整数点での値が計算できる. $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ に対し,

$$\begin{aligned}
L_{p,2}(-m,-n;\omega^m,\omega^n;\gamma;c) &= \int_{(\mathbb{Z}_p^2)'_\eta} x^m(x+y\gamma)^n d\mathfrak{m}_c(x)d\mathfrak{m}_c(y)\\
= \sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq 1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq 1}}\beta(m,n;\xi_1,\xi_2;\gamma) &- \frac{1}{p}\sum_{\rho_1^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq 1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq 1}}\beta(m,n;\xi_1\rho_1,\xi_2;\gamma)\\
&- \frac{1}{p}\sum_{\rho_2^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq 1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq 1}}\beta(m,n;\xi_1\rho_2,\xi_2\rho_2^\gamma;\gamma)\\
&+ \frac{1}{p^2}\sum_{\rho_1^p=1}\sum_{\rho_2^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq 1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq 1}}\beta(m,n;\xi_1\rho_1\rho_2,\xi_2\rho_2^\gamma;\gamma).
\end{aligned}$$

ここで $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}_p$ ならば

$$\zeta_2(s_1,s_2;\xi_1,\xi_2;\gamma) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\xi_1^m\xi_2^n}{m^{s_1}(m+n\gamma)^{s_2}} \tag{5.3}$$

とおくと, $(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$ へ有理型に解析接続されて

$$\zeta_2(-m,-n;\xi_1,\xi_2;\gamma)=(-1)^{m+n}\beta(m,n;\xi_1^{-1},\xi_2^{-1};\gamma)\qquad(m,n\in\mathbb{N}_0).$$

以上から次を得る.

Theorem 5.1. $m,n\in\mathbb{N}_0$, $\gamma\in\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{Z}_p$ について

$$\begin{aligned}
&L_{p,2}(-m,-n;\omega^m,\omega^n;\gamma;c)\\
&=(-1)^{m+n}\Bigg\{\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq1}}\zeta_2(-m,-n;\xi_1,\xi_2;\gamma)-\frac{1}{p}\sum_{\rho_1^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq1}}\zeta_2(-m,-n;\xi_1\rho_1,\xi_2;\gamma)\\
&\quad-\frac{1}{p}\sum_{\rho_2^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq1}}\zeta_2(-m,-n;\xi\rho_2,\xi_2\rho_2^\gamma;\gamma)\\
&\quad+\frac{1}{p^2}\sum_{\rho_1^p=1}\sum_{\rho_2^p=1}\sum_{\substack{\xi_1^c=1\\ \xi_1\neq1}}\sum_{\substack{\xi_2^c=1\\ \xi_2\neq1}}\zeta_2(-m,-n;\xi_1\rho_1\rho_2,\xi_2\rho_2^\gamma;\gamma)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

とくに $\gamma\in q\mathbb{Z}_p$ の条件下では, 次のような Bernoulli 数による表示を得る.

Corollary 5.2. $m,n\in\mathbb{N}$, $\eta\in q\mathbb{Z}_p$ について,

$$L_{p,2}(-m,-n;\omega^m,\omega^n;\eta;c)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu}\left(1-c^{m+\nu+1}\right)\left(1-c^{n-\nu+1}\right)\left(1-p^{m+\nu}\right)\frac{B_{m+\nu+1}B_{n-\nu+1}}{(m+\nu+1)(n-\nu+1)}\eta^{n-\nu} & (m+n:\mathrm{even})\\ \displaystyle\frac{c-1}{2}\left(1-c^{m+n+1}\right)\left(1-p^{m+n}\right)\frac{B_{m+n+1,\chi_0}}{m+n+1} & (m+n:\mathrm{odd})\quad\cdots(\star)\end{cases}$$

ここで $(\star)$ の p 進補間として, 次のような関数関係式が成り立つ.

Theorem 5.3. $k,l\in\mathbb{N}$ $(k+l\colon\mathrm{odd})$, $\eta\in q\mathbb{Z}_p$ について

$$\begin{aligned}&L_{p,2}(s_1,s_2;\omega^k,\omega^l;\eta;c)\\ &\quad=\frac{c-1}{2}\left(\langle c\rangle^{1-s_1-s_2}\omega^{k+l+1}(c)-1\right)L_p(s_1+s_2;\omega^{k+l+1}).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Remark 5.4. Corollary 5.2 と Theorem 5.3 について, $c=2$ の場合は既に [5] で示したが, $p=2$ の場合も扱えるように一般化した.

ここで $k+l$ が偶数の場合, $L_p(s;\omega^{k+l+1})$ は 0 関数である. 他方, $k+l$ が偶数であっても, (5.4) の左辺は, 以下で見るように 0 関数ではない. 実際 Corollary 5.2 より, 例えば

$$L_{p,2}(-1,-1;\omega,\omega;\eta;c)=\frac{(1-c^2)^2(1-p)}{4}B_2^2\eta$$

を得るので, この値は ($\eta \neq 0$ ならば) 0 ではない. このことから, $L_{p,2}$ **が** L_p **の持つ以上の情報を持っている**と考えられる.

二重の場合と同様に, Theorem 5.1 の多重化として, p 進多重 L 関数の負の整数点での値を, 複素変数の多重ポリログの一般化である

$$\zeta_r((s_j);(\xi_j);(\gamma_j)) := \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{r} \xi_j^{m_j}}{\prod_{k=1}^{r}(\sum_{j\leq k} \gamma_j m_j)^{s_k}} \tag{5.5}$$

の負の整数値を使って記述できる. その p 進補間として, Theorem 5.3 の多重化に対応する関数関係式が得られる. これらの詳細に関しては, 古庄-小森-松本-津村 [3] を参照.

6. 正の整数点での値

この節では, 古庄 [2] と同様の手法を用いて, $L_{p,2}(s_1, s_2; \omega^m, \omega^n; 1; c)$ の正の整数点での値を考察する. 以下, $(c,p)=1$ となる $c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ を固定する.

Definition 6.1 (p 進二重ポリログ)**.** $a, b \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mu_{cp}$ について

$$Li_{a,b}(\xi, z) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\xi^m z^{m+n}}{m^a (m+n)^b} \quad (z \in \mathbb{C}_p;\ |z|_p < 1) \tag{6.1}$$

と定義する. さらに $\xi \in \mu_c$ について

$$\ell_{a,b}(\xi, z) := \sum_{\substack{m,n=1 \\ p\nmid m \\ p\nmid(m+n)}}^{\infty} \frac{\xi^m z^{m+n}}{m^a (m+n)^b} \quad (z \in \mathbb{C}_p;\ |z|_p < 1) \tag{6.2}$$

と定義する.

このとき, 次のような積分表示を得る.

Theorem 6.2.

$$\ell_{a,b}(\xi, z) = \int_{(\mathbb{Z}_p^2)_1'} \langle x \rangle^{-a} \langle x+y \rangle^{-b} \omega^{-a}(x) \omega^{-b}(x+y) d\mathfrak{m}_{\xi z}(x) d\mathfrak{m}_z(y).$$

この p 進二重ポリログの積分表示から以下の corollaries が得られる.

Corollary 6.3. $\ell_{a,b}(\xi, z)$ はアニュラス $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \smallsetminus]\bar{1}, \bar{\xi}^{-1}[$ に rigid 解析的に解析延長できる.

Corollary 6.4. $a, b \in \mathbb{N}$ について

$$L_{p,2}(a, b; \omega^{-a}, \omega^{-b}; 1; c) = \sum_{\substack{\xi_1, \xi_2 \in \mu_c \\ \xi_1\xi_2 \neq 1,\, \xi_2 \neq 1}} \ell_{a,b}(\xi_1, \xi_2).$$

Corollary 6.5. $\ell_{a,b}(\xi, z)$ は over-convergent function, したがって Coleman function である.

ここで, 次のような関係式が得られる

Proposition 6.6. $\xi_1 \in \mu_c$ について

$$\ell_{a,b}(\xi_1, z) = \frac{1}{p^2} \sum_{0<j_1,j_2<p} \sum_{\rho_1,\rho_2\in\mu_p} \rho_1^{-j_1}\rho_2^{-j_2} Li_{a,b}(\rho_1\xi_1, \rho_2 z).$$

この関係式は $|z|_p < 1$ で成り立つので, 一致の定理によって $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus]\bar{1}, \bar{\xi}_1^{-1}, \bar{\infty}[$ において成り立つ. 以上のことから, 次の定理を得る.

Theorem 6.7. $a, b \in \mathbb{N}$ について

$$L_{p,2}(a, b; \omega^{-a}, \omega^{-b}; 1; c) = \frac{1}{p^2} \sum_{0<j_1,j_2<p} \sum_{\rho_1,\rho_2\in\mu_p} \sum_{\substack{\xi_1,\xi_2\in\mu_c \\ \xi_1\xi_2\neq 1,\, \xi_2\neq 1}} \rho_1^{-j_1}\rho_2^{-j_2} Li_{a,b}(\rho_1\xi_1, \rho_2\xi_2). \quad (6.3)$$

Remark 6.8. ここで (5.3) において $\gamma = 1$ の場合, $\zeta_2(s_1, s_2; \xi_1, \xi_2; 1)$ は複素変数の二重ポリログとみられる. このとき Theorem 5.1 から, $L_{p,2}(s_1, s_2; \omega^k, \omega^l; 1; c)$ は複素変数の二重ポリログの有限和の負の整数点での p 進補間と見られるが, (6.3) において, その正の整数点での値が p 進二重ポリログの有限和でかけている点は非常に興味深い.

References

1. T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple L-values, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 967-991.
2. H. Furusho, p-adic multiple zeta values I: p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Invent. Math. **155** (2004), 253-286.
3. H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On p-adic multiple L-functions and p-adic multiple polylogarithms, preprint.
4. N. Koblitz, *p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **46**, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
5. Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, Int. J. Number Theory **7** (2011), 1441–1461.
6. K. Matsumoto and Y. Tanigawa, The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **15** (2003), 267-274.

古庄 英和 e-mail: furusho@math.nagoya-u.ac.jp

津村 博文 e-mail: tsumura@tmu.ac.jp