学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 1 回（4/10）

1. 分配法則のうち $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を真理値表を書いて確かめよ．

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

2. ド・モルガンの法則を真理値表を書いて確かめよ．

（発展問題）

3. $(p \vee \neg q) \to (p \wedge \neg q)$ を積和標準形で表せ．

4. $p \vee q$ を $p, q, \downarrow$（NOR）（と括弧）のみを用いて表せ．

（第 1 回の解答例）

1. 真理値表を書くと，対応する複合命題の真理値（網掛け部）が一致するので同値である．

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

2. 真理値（網掛け部）が一致するので同値である．

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

3. 真理値表を書くと次の通り．

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge \neg q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

真となる場合を「かつ」で表して,「または」で並べることで，積和標準形は $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ となる．

4. $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$（「$p$ OR q」の否定）である．
$p \downarrow p \equiv \neg p$ である．よって $p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
ちなみに $p \wedge q \equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第２回（4/17）

5. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合として，部分集合 $A = \{2, 3, 5\}$，$B = \{n \in U \mid n^2 = 5n\}$，$C = \{n \in U \mid n$ は偶数 $\}$ を考える．次の集合を要素を具体的に列挙することで表せ．

(1) $(A \setminus B) \cup \overline{C}$　　(2) $A \times B$　　(3) 2^A

（発展問題）

6. 新しいお弁当についてアンケートをとったところ，89 人から回答があり，次の表のようになった．

おいしい	61 人	安い	50 人
まずい	28 人	高い	39 人

まずくて高いと回答した人が 19 人であるとすると，おいしくて安いと回答した人は何人か．

7. 全体集合 U の部分集合 A，B が $A \subseteq B$ を満たしているとする．$\overline{B} \subseteq \overline{A}$ が成り立つことを示せ．

8. 次のうち正しいものはどれか．

$\varnothing \subset 2^{\varnothing}$，$\varnothing \in 2^{\varnothing}$，$\varnothing = \{\varnothing\}$，$\varnothing \times \varnothing = \varnothing$，

※過去の問題・解答の URL

http://www.comp.tmu.ac.jp/masanori/Lecture/18risan.pdf

（第２回の解答例）

5. $B=\{0,5\}$，$C=\{0,2,4,6,8\}$ である．

(1) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{2,3\}$ と $\overline{C}=\{1,3,5,7,9\}$ に注意すると，$\{1,2,3,5,7,9\}$.

(2) $\{(2,0),(2,5),(3,0),(3,5),(5,0),(5,5)\}$.

※平面の点の座標を x 座標と y 座標の組（順序対）として表すように，直積 $A \times B$ は，順序対 (a,b)（$a \in A, b \in B$）の集合である．順序対は ( )，集合は { } を用いる．要素の間はコンマで区切る．

(3) $\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},A\}$

※ A のべき集合 2^A は，A の部分集合を要素とする集合である．空集合を表すには $\varnothing$ を用いる．なお，$\{\varnothing\}$ は「空集合を要素とする集合」であり，空集合ではない．

6. 回答者の集合を U とし,「おいしい」「安い」と回答した人の集合をそれぞれ A，B とすると,「まずい」「高い」と回答した人の集合はそれぞれ $\overline{A}$，$\overline{B}$ である．

$|A\cap B| = |A|+|B|-|A\cup B| = |A|+|B|-(|U|-|\overline{A}\cap\overline{B}|) = 61+50-89+19=41$．よって 41 人．

（別解）「まずい」と回答した 28 人のうち 19 人が「高い」と回答したのであるから，残りの 9 人は「安い」と回答している.「安い」と回答した人は全部で 50 人いるから，そのうち $50-9=41$ 人が「おいしい」と回答している．

※無回答はないことに注意する．

7. $A \subseteqq B$ とは $(x\in A)\to(x\in B)$ が真であることである．よって対偶の $(x\notin B)\to(x\notin A)$ も真であり，補集合の定義から $(x\in\overline{B})\to(x\in\overline{A})$ は真である．よって $\overline{B}\subseteqq\overline{A}$.

8. $\varnothing=\{\varnothing\}$ 以外は正しい．

$\varnothing$ は任意の集合の部分集合である．実際，任意の集合 A に対し，$(x\in\varnothing)\to(x\in A)$ は，仮定が偽なので常に真である．特に $\varnothing \subseteqq 2^{\varnothing}$ である．

$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ であるから，$\varnothing\in 2^{\varnothing}$ である．

$\{\varnothing\}$ は空集合という 1 個の要素をもつ集合である．よって $\varnothing\neq\{\varnothing\}$ である．

$(x,y)\in\varnothing\times\varnothing$ とすると，$x\in\varnothing$ かつ $y\in\varnothing$ であるが，空集合は要素をもたないのでこのようなことはない．よって $\varnothing\times\varnothing=\varnothing$ である．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門c（小林）第３回（4/24）

9. $A = \{$ 昭和, 平成 $\}$，$B = \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ として $A \times B$ に辞書式順序を入れる．ただし A の順序は 昭和 $<$ 平成 であるとし，B は自然な順序で考える．

(平成, 1), (平成, 10), (昭和, 20), (平成, 30), (昭和, 64) を大きい順に並べよ．

10. 正の整数 n に対し，$D_n = \{\, n$ の正の約数 $\}$ とし，$a \leqq b \iff a \,|\, b$ とする．D_{24} のハッセ図を描け．

（発展問題）

11. 以下の問い（テキスト問 3.32，$p.87$）に答えよ．解答は参照しないこと．

$\boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ に $a \leqq b \iff a \mid b$ により順序を入れる．

(1) $\{18, 20, 40\}$ の上界・下界・上限・下限を（あれば）求めよ．　(2) $60 \vee 55$，$13 \wedge 31$ を求めよ．

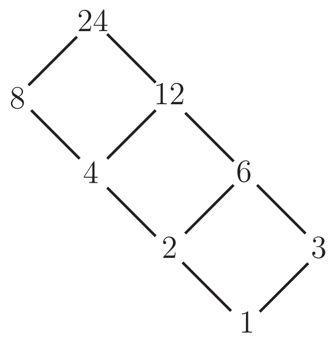
(3) $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ に対し，最大・最小・上限・下限を（あれば）求めよ．

12. $A = \{R, G, B\}$ のべき集合 2^A に包含関係で順序を入れる．$X \in 2^A$ と $\{R\}$ の上限が $\{R, G\}$ となるとき，X の取りうる可能性をすべて挙げよ．

（第３回の解答例）

9. $(\text{平成}, 30), (\text{平成}, 10), (\text{平成}, 1), (\text{昭和}, 64), (\text{昭和}, 20)$.
※まず第１成分の大小を比較し，同じ場合は第２成分の大小を比較する．

10. $24 = 2^3 \cdot 3$ であるから，$D_{24} = \{2^a 3^b \mid a = 0, 1, 2, 3;\ b = 0, 1\}$．べきが一つだけ違う数を線で結び，図のようになる．



11. この順序に対しては，上界＝公倍数，下界＝公約数，上限＝最小公倍数，下限＝最大公約数である．

(1) 素因数分解すると $18 = 2\cdot 3^2$，$20 = 2^2\cdot 5$，$40 = 2^3\cdot 5$ である．上界はこれらの公倍数であるから，$2^a 3^b 5^c$（$a \geqq 3$，$b \geqq 2$，$c \geqq 1$）で割り切れる．よって，360 の倍数である．上限は上界の最小元（すなわち最小公倍数）であるから 360．同様にして，下界＝２の約数＝１または２，下限＝２.

(2) $\vee$ は上限，$\wedge$ は下限を表す．$60 \vee 55 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5) \wedge (5 \cdot 11) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 660$．$13 \wedge 31 = 1$.

(3) $\max A$ なし，$\min A = 1$，$\sup A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 10920$，$\inf A = 1$.

12. 上限 $\{R, G\}$ に X は含まれる．X に G が属さないとすると X は $\{R\}$ に含まれるが，すると上限が $\{R\}$ となり不適．よって X は $\{G\}$ を含み $\{R, G\}$ に含まれるから，$\{G\}$，$\{R, G\}$.
※ 2^A において $X \subseteqq Y$ のとき $X \leqq Y$ と定めた．このとき Z が X と Y の上界であるとは「$X \subseteqq Z$ かつ $Y \subseteqq Z$」ということであるが，これは $X \cup Y \subseteqq Z$ と同値である．$X \cup Y$ 自身も X と Y の上界であるから最小の上界すなわち上限である．よって X と Y の上限は和集合 $X \cup Y$ である．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第４回（5/1）

13. (1) $3^2 = 8 + 1$ の両辺を二乗することで $3^4 \equiv 1 \mod 16$ を示せ.
(2) 3^{999} を 16 で割った余りを求めよ.

14. テキストの問 3.14（p.78）を解け.

（発展問題）

15. $11x + 19y = 1$ の整数解を求めよ.

16. $\boldsymbol{Z}_7$ の範囲で次の連立一次方程式を解け（同値類の記号は省略してある）.
$2x + 3y = -1$，$-x + 2y = 4$.

（第４回の解答例）

13. (1) 公式 $(x+y)=x^2+2xy+y^2$ を利用して，$3^4=(8+1)^2=8^2+2\times 8+1\equiv 1 \mod 16$.
(2) $999=4\times 249+3$ であるから $3^{999}=(3^4)^{249}\cdot 3^3\equiv 1^{249}\cdot 27\equiv 11 \mod 16$.

14. テキスト参照.

15. 11 と 19 にユークリッドの互除法を適用して，特殊解を求める．
$19=11\times 1+8$,
$11=8\times 1+3$,
$8=3\times 2+2$,
$3=2\times 1+1$．特に 11 と 19 の最大公約数は 1 である（互いに素である）．逆に解いていくと，
$1=3-2=3-(8-3\times 2)=-8+3\times 3=-8+(11-8)\times 3=11\times 3-8\times 4=11\times 3-(19-11)\times 4=19\times(-4)+11\times 7$.
よって特殊解として $(x,y)=(7,-4)$ が見つかった．方程式から辺辺引いて，
$11(x-7)+19(y+4)=0$.
これより方程式は
$11(x-7)=-19(y+4)$
と同値である．右辺は 19 で割り切れるから左辺もそうである．11 と 19 は互いに素であるから，$x-7$ が 19 の倍数であり，整数 k を用いて $x-7=19k$ と表せる．代入して $y+4=-11k$ を得る．よって $(x,y)=(7,-4)+k(19,-11)$ である．これは任意の整数 k に対し方程式を満たすことが確かめられるから十分でもあり，解は
$(x,y)=(7,-4)+k(19,-11)$ （k は任意の整数）．

16. 拡大係数行列を掃き出し法で階段行列にする．
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -② \\ ① \end{array} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ ②-2\times ① \end{array}.$$
ただし最後の変形では $\pm 7\equiv 0$ を用いた．
方程式に直すと $x=2y-4$．これより
$(x,y)=(-4,0)+k(2,1)$（$k\in \boldsymbol{Z}_7$）．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 5 回（5/8）

17. 面積上位 7 か国の集合 X と，表の農産物の集合 Y の間の次の対応 R を考える（○が $x \mathrm{R}\, y$ を表す）.

農産物 $y \setminus$ 国 x	露	加	米	中	伯	豪	印
小麦	○	○	○	○	—	○	○
大豆	○	○	○	○	○	—	○
トウモロコシ	—	○	○	○	○	—	○
バナナ	—	—	—	○	○	—	○
コーヒー	—	—	—	—	○	—	○

表 1: $x \mathrm{R}\, y \iff x$ は y の生産上位 10 か国（2016 年）

以下はそれぞれ正しいか.

(1) $\forall x \in X\ \exists y \in Y\ x \mathrm{R}\, y$　　(2) $\exists y \in Y\ \forall x \in X\ x \mathrm{R}\, y$　　(3) $\exists x \in X\ \forall y \in Y\ x \mathrm{R}\, y$

18. 次の対応のうち，写像であるものはどれか．写像であるものに対し，単射・全射であるか判定せよ.

(1) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$x \mapsto x^2$，　(2) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$，$x \mapsto \frac{1}{x}$，　(3) $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$，$x \mapsto x+1$，

(4) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$，$(x, y) \mapsto xy$

（発展問題）

19. 写像 $f : A \to B$ に対し，次は必ずしも成り立たない．それぞれについて反例を挙げよ.

(1) $f(f^{-1}(B)) = B$.

(2) A_1, A_2 を A の部分集合とするとき，$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

（第５回の解答例）

17. (1) どの国に対してもある農産物に〇が付いている，という主張なので，縦の列ごとに〇がついているかどうか確かめると，どの列にも〇がある．よって正しい（真）．

(2) ある農産物に対してはすべての国に対し〇が付いている，という主張なので，横の行をみて，全部〇で埋まっているものがあるか確かめる．そのような行はないので，誤り（偽）．

(3) ある国に対してすべての農産物に対し〇が付いている，という主張なので，印（インド）が該当する．よって正しい（真）．

18. (2) 以外は始域の任意の x に対し，式で与えられた $f(x)$ が終域の元としてただ一つ定まるので写像である．(2) は $x=0$ の像 $f(0)$ が $\boldsymbol{R}$ 内に定まらないので写像ではない．

(1) 単射でも全射でもない．

(3) 単射であるが全射ではない．

(4) 単射でないが全射である．

19. (1) $A=\varnothing$，$B=\{0\}$ とすれば，左辺は空集合であるが右辺はそうでない．(条件は f が全射であることと同値である．)

(2) $A=\{1,2,3\}$，$A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{1,3\}$，$B=\{0,1\}$，$f(1)=f(3)=0$，$f(2)=1$ とすると，$f(A_1\cap A_2)=f(\{1\})=\{0\}$，$f(A_1)\cap f(A_2)=\{0,1\}\cap\{0,1\}=\{0,1\}$．

学修番号　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 6 回（5/15）

20. 集合 A, B の対称差 $A \triangle B$ を次で定める．

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 5, 7\}$，$C = \{3, 4, 6, 7\}$ とするとき，$A \triangle B$，$(A \triangle B) \triangle C$ を求めよ．

(2) 次の 3 つの複合命題が同値であることを真理値表で示せ．ただし $\veebar$ は XOR（排他的論理和）を表す．

$$p \veebar q, \quad (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q), \quad \neg(p \leftrightarrow q)$$

(3) $x \in A \triangle B$ は $(x \in A) \veebar (x \in B)$ と同値であることを，$p = (x \in A)$，$q = (x \in B)$ とおくことで示せ．

(4) A, B はある全体集合 U の部分集合であるとする．特性関数に関する次の等式を示せ．

$$\chi_{A \triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$$

（発展問題）

21. 600 以下の正整数の中から n をランダムに 1 つ選ぶ．n が 3 の倍数になる事象を A とし，n が 4，5，6 のいずれかの倍数になる事象を B とする．なお整数 a, b の最小公倍数 l に対し，$(a|n) \wedge (b|n) \iff l|n$ である（最大公約数 d に対しては $(n|a) \wedge (n|b) \iff n|d$ である．もし余裕があればこれらを証明せよ）．

(1) 確率 $P(A)$，$P(B)$ を求めよ．

(2) $P(A \cap B)$ を求めよ．

(3) $n \in A$ のもとで，$n \in B$ となる条件付き確率 $P_A(B)$ を求めよ．

（第 6 回の解答例）

20. (1) 定義より $A\triangle B=\{2,4\}\cup\{5,7\}=\{2,4,5,7\}$，$(A\triangle B)\triangle C=\{2,5\}\cup\{3,6\}=\{2,3,5,6\}$.

(2) 真理値表を書くと次のようになる．

p	q	$p\veebar q$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$	$p\leftrightarrow q$	$\neg(p\leftrightarrow q)$
T	T	F	F	F	F	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	F	T	F

3 つの複合命題は，真理値が恒等的に等しいことから，同値な命題である．

(3) 命題 p,q をそれぞれ $p=(x\in A)$，$q=(x\in B)$ であるとする．
$\triangle$ の定義から

$$(x\in A\triangle B)\ \equiv\ ((x\in A)\wedge(x\notin B))\vee((x\in B)\wedge(x\notin A))\ \equiv\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q).$$

(2) よりこれは $p\veebar q$ すなわち $(x\in A)\veebar(x\in B)$ と同値である．

(4) (3) と同様にして，$x\in A\triangle B$ は $\neg((x\in A)\leftrightarrow(x\in B))$ と同値である．否定の中身は $A=B$ ということであるから，$\chi_A(x)=\chi_A(B)$ すなわち $\chi_A(x)-\chi_B(x)=0$ と同値である．よって元の命題は $\chi_A(x)-\chi_B(x)\neq 0$ と同値であり，これは特性関数の値が 0 か 1 であることから $|\chi_A(x)-\chi_B(x)|=1$ と同値である．

21. (1) 一般に，N 以下の正整数のうちで，正整数 d の倍数は $[\frac{N}{d}]$ 個ある[1]．よって $|A|=200$ である．包除原理より，$|B|=150+120+100-30-50-20+10=280$ である．$|U|=600$ であるから，求める確率は，$P(A)=\dfrac{|A|}{|U|}=\dfrac{300}{600}=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{|B|}{|U|}=\dfrac{280}{600}=\dfrac{7}{15}$.

(2)
$$(3|n)\wedge((4|n)\vee(5|n)\vee(6|n))\ \equiv\ (12|n)\vee(15|n)\vee(6|n)\ \equiv\ (6|n)\vee(15|n)$$
より，$A\cap B$ は n が $6,15$ の何れかの倍数になる事象である．$|A\cap B|=100+40-20=120$．よって $P(A\cap B)=\dfrac{120}{600}=\dfrac{1}{5}$.

(3) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{3}{5}$.

[1] 実数 α に対し，記号 $[\alpha]$ で α を越えない最大の整数を表す．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 7 回（5/22）※次回は中間試験

22. $x_1 + \cdots + x_n = r$ の非負整数解の個数は，${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ に等しいことに注意する．

(1) 不等式

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq 3$$

の非負整数解の個数を，$x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3$ とおくことにより求めよ．

(2) サイコロを 3 個振ったとき，出た目の合計が 7 以上となる確率を求めよ．
（ヒント：出た目を y_1, y_2, y_3 として，$x_i = y_i - 1$（$i = 1, 2, 3$）とおく．余事象を考えよ.）

（発展問題）

23. 平面に 5 個の格子点（座標が整数である点）を取る．ある 2 点の中点が格子点になることを示せ．

24. 等比数列 ar^k（$k = 0, 1, 2, \ldots$）に対し第 n 項までの母関数は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ar^k x^k = a\frac{1-(rx)^{n+1}}{1-rx}$ である．

(1) 両辺を x で微分した式を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ を求めよ．

（第 7 回の解答例）

22. (1) $\sum_{i=1}^{4} x_i = 3$ の整数解の個数は ${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 15$ 個.

(2) 出た目を y_1, y_2, y_3 とすると，$1 \leqq y_i \leqq 6$（$i = 1, 2, 3$）であり，余事象は $y_1 + y_2 + y_3 \leqq 6$，$x_i := y_i - 1$（$i = 1, 2, 3$）とおくと $x_1 + x_2 + x_3 \leqq 3$ であり，このとき $x_i \leqq 5$ は自動的に満たされる．よって余事象は (1) より 15 通り，全事象は $6^3 = 216$ 通りであるから，$(216 - 15)/216 = 67/72$.

23. 座標を偶奇で考えると 4 通り．5 点あれば鳩の巣原理より同じ偶奇をもつ点の対がある．それらの中点は格子点である．

24. (1) $\sum_{k=1}^{n} akr^k x^{k-1} = a\frac{-(n+1)r(rx)^n(1-rx)-(-r)(1-(rx)^{n+1})}{(1-rx)^2} = \frac{ar}{(1-rx)^2}(1-(n+1)(rx)^n + n(rx)^{n+1})$.

(2) $a = 1$，$r = 2$，$x = 1$ を代入して，$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \frac{2}{(1-2)^2}(1-(n+1)2^n + n2^{n+1}) = 2 + (n-1)2^{n+1}$.
※この程度であれば，$(1-2)$ 左辺 $= \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{k=1}^{n} k2^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{l=2}^{n+1}(l-1)2^l = 2 + \sum_{k=2}^{n} 2^k - n2^{n+1}$ からも求まる．

線形漸化式の一般論．

簡単のため 2 階差分方程式（3 項間漸化式）の場合に述べるが，一般の場合も同様である．

数列の全体は項ごとの加法とスカラー倍によりベクトル空間をなす．(a_n) に (a_{n+1}) を対応させる写像 T は線形変換である．

p, q を定数，(c_n) を与えられた数列として，未知数列 (a_n) に関する漸化式

$$(T^2 + pT + q)(a_n) = (c_n)$$

（つまり $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = c_n$，$n = 0, 1, 2, \ldots$）を考える．初期値 a_0, a_1 は最初は指定しないで考える．

漸化式は各項に対する連立一次方程式であるから，連立一次方程式の解の構造定理より，漸化式の一般解は，特殊解＋同次形の一般解，の形に書ける．以下では，特殊解が何らかの方法で見つかったとして，同次形の一般解について述べる．

同次形の漸化式とは $(T^2 + pT + q)(a_i) = (0)$ である．最初の 2 項 a_0, a_1 を自由に与えると漸化式から帰納的に数列は決まる．よって解空間の次元は 2 である．$T^2 + pT + q = (T - \alpha)(T - \beta)$ と因数分解する．

(1) $\alpha \neq \beta$ のとき，(α^n)，(β^n) は一次独立な解である．実際，最初の 2 項をみると $(1, \alpha)$ と $(1, \beta)$ は平行でない．解空間が 2 次元であるから基底になり，任意の解はこれらの一次結合として表せる．よって一般解は A, B を任意のスカラーとして

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

と表せる．

(2) $\alpha = \beta$ のとき，(α^n)，$(n\alpha^{n-1})$ は一次独立な解である（ただし $\alpha = 0$ のとき，$1, 0, 0, \ldots$ と $0, 1, 0, \ldots$ という意味である）．実際，最初の 2 項 $(1, \alpha)$，$(0, 1)$ は平行でない．よって (1) と同様に，一般解は

$$a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^{n-1}$$

と表せる．

(1)(2) いずれの場合も，A, B を初期値（初項）から求めればよい．

なお，ここでは天下りに一般解の基底を与えて解になることを確かめたが，母関数を用いて一から求めることもできる．

特殊解はきれいに求まるとは限らないが，差分や母関数などを用いて求めることができる場合がある．

離散数学入門 c（小林）中間試験

平成 30 年 5 月 29 日（火）3 限

・かならず，計算の過程を書き，理由をきちんと説明すること．
・スマホ等は電源を切ってカバンにしまうこと．
・学生証を見えるように机の上に置くこと．
・机の上には筆記用具，学生証，時計以外は置かないこと．

1. 次の問いに答えよ．

(1) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,5,7\}$ とする．$2^{A\setminus B}$ を，要素を列挙することで表せ．

(2) 集合 $A=\{1,2,3,4,6,8,9,12\}$ において，a が b を割り切るとき「a は b 以下である」という順序を定める．A のハッセ図を描け（答えのみでよい）．

(3) a を実数の定数とする．次の対応 f が写像になるための a の条件を述べよ．ただし $\boldsymbol{N}$ で非負整数の全体を表す．

$$f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N},\quad x\mapsto x^2-a$$

2. 次の問いに答えよ．計算の過程も書くこと．

(1) p,q を命題変数とするとき，$\neg(p\to\neg q)$ の真理値表を書け．

(2) ある洋菓子屋のマカロンには，バニラ，チョコ，カシス，ピスタチオ，ブルーベリーの 5 種類がある．これらを合計 12 個以下選ぶ組合せは何通りか．ただしどれも 1 個も選ばない組合せも含めて数える．

(3) (2) のもとで，カシスを 3 個以上選ぶならばブルーベリーを 3 個以上選ばないとすると，組合せは何通りか．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 8 回（6/5）

25. 「串」の形のグラフに対し，次の問いに答えよ．ただし頂点は隅の 8 点と中央の縦線上の 6 点とする．

(1) 辺の数と，頂点の次数の和を求めよ．

(2) オイラー路（一筆書き）は何通りあるか．

（発展問題）

26. グラフ G の頂点はすべて次数が 3 であるとする．辺が 6 本あるとき，頂点は何個あるか．

27. 正十二面体の辺と頂点からなるグラフに対し，ハミルトン閉道を見つけてみよ．

（第８回の解答例）

25. (1) 辺の数 17，握手補題より頂点の次数の和は辺数の 2 倍だから 34.

(2) 奇点が 2 個だから一筆書き可能であり，一方の奇点を始点とし他方を終点とする．中心にある辺を除くと非連結になるから，二つある「中」の字は一方を先に書き終える必要があることに注意する.「中」の 3 つの縦線をどの順に通るかは $3! = 6$ 通りあるから，$2 \times 6^2 = 72$ 通り.

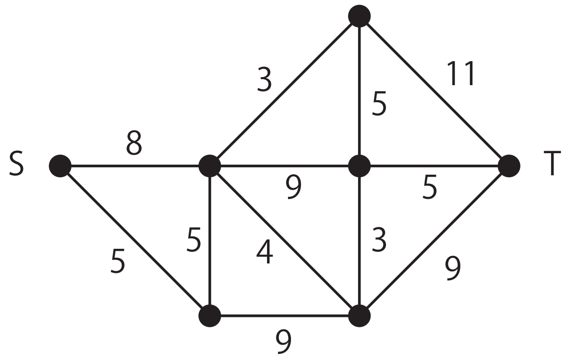
26. 頂点集合を V とすると，握手補題より $3|V| = 2 \times 6$．よって $|V| = 4$.
なお，例えば完全グラフ K_4 はこの条件を満たすから，条件を満たすグラフは存在する.

27. 省略.

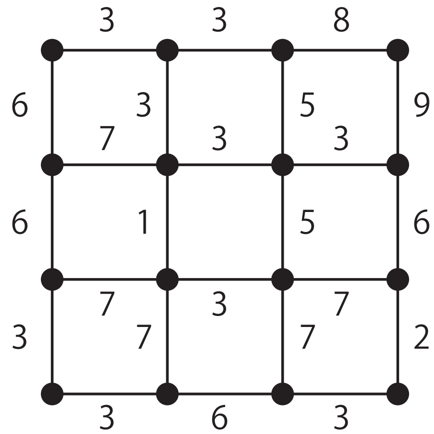
学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第 9 回（6/12）

28. 次の重み付きグラフの頂点 S から頂点 T への経路（path）の中で，辺の重みの和が最小となるものを一つ求めよ．



29. 次の重み付きグラフに対し，最小全域木を一つ求めよ．



（発展問題）テキスト問 4.110 を解け．

（第 9 回の解答例）

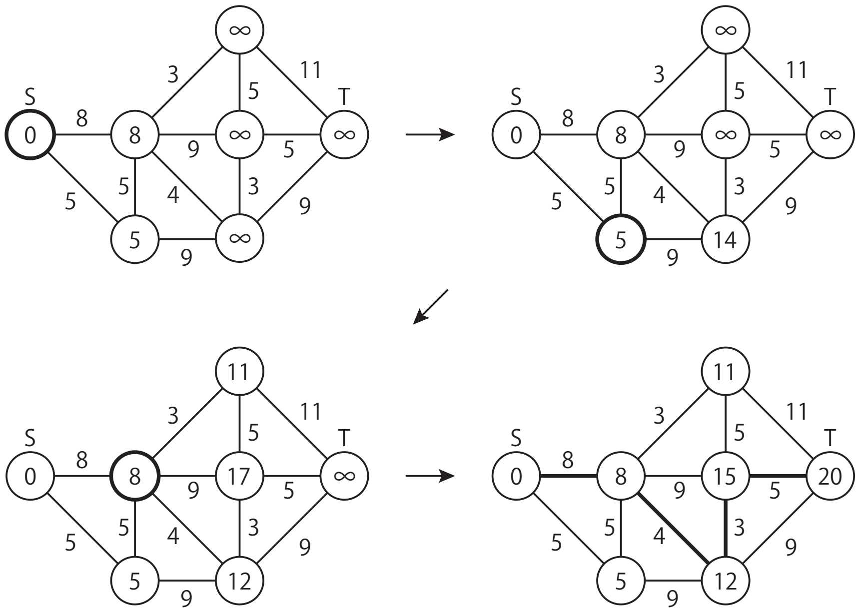
28. Dijkstra のアルゴリズムによる．

(1) まず頂点 S にラベル 0 を付ける．S に隣接する頂点に辺の重みをラベル付けする．

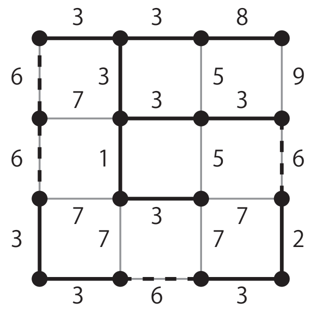
(2) S 以外の重み最小の頂点（重み 5）を選ぶ．隣接する（まだ選んでいない）各頂点に対し，5 と辺の重みの和のほうが付いているラベルより小さければ，その値にラベルを更新する．上側の頂点の値 8 は $5+5$ より小さいので更新しない．

(3) 次に値の小さな 8 に対し同様に頂点の値を更新する．14 であった右下の値はより小さな $8+4=12$ に更新される．

(4) 同様にして，まだ選んでいない頂点のうちで，ついている値が最小の頂点を選び，隣接するまだ選んでいない頂点のラベルを更新していく．T を選んだ段階で終了すると，右下のようになり，最小値は 20.



29. Kruscal のアルゴリズムによる．辺に適当に順序を入れておき，辺の重みが小さい方から考え，サイクルが生じない限りつないでいく．すべての頂点がつながったら終了すると，次のようになる．ただし，4 つの破線のうち任意の 3 つをつなぎ残りの 1 つはつながない．



学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第１０回（6/19）

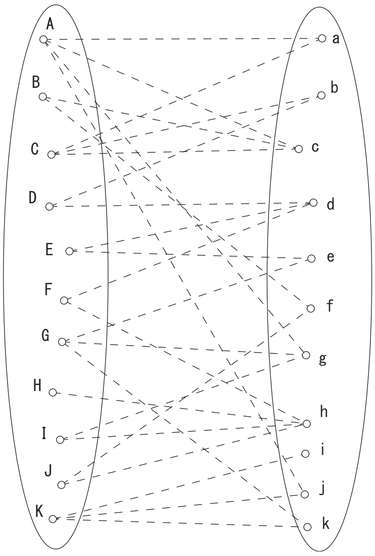
30. 問 **25** の「串」の字のグラフ G を考える．

(1) G は二部グラフであることを示せ．

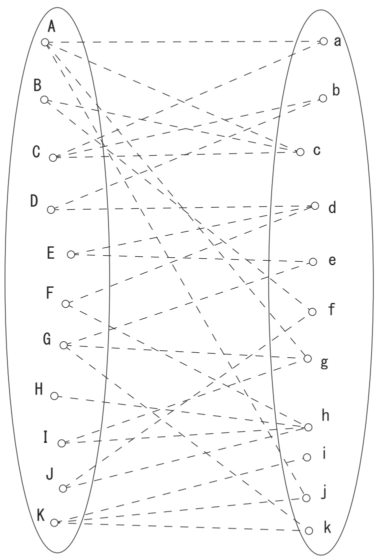
(2) G の最大マッチングを一つ与えよ．

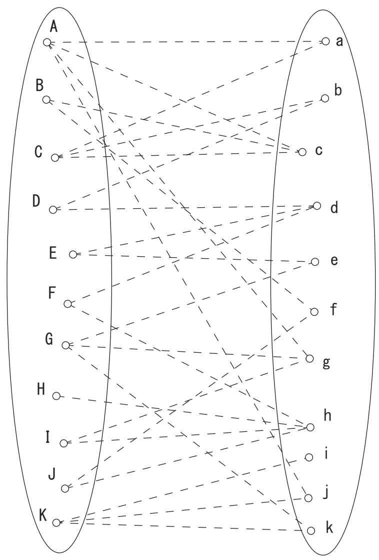
（発展問題）

31. 次の二部グラフの最大マッチングを一つ構成せよ．



以下は計算用：





（第１０回の解答例）

30. (1) G は縦横の格子からなるグラフの部分グラフになるから，二部グラフである．
(2) 「中」の中央の縦線を除くと縦に 7 本の独立辺（マッチング）をとることができる．これは完全マッチングであるから，特に最大マッチングである．
※完全マッチングとは限らない場合にも通用する方法：各辺の下側の端点からなる 7 頂点は頂点被覆になっていることが確かめられる．一般に，マッチング数 $\leqq$ 頂点被覆数，が成り立つので，7 本は最大である．

31. 増大道を探してマッチングを更新することを繰り返せばよい．A-j, B-c, C-a, D-b, E-e, F-d, G-k, H-h, I-g, J-f, K-i は完全マッチングであるから最大マッチングとなる。

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第１１回（6/26）

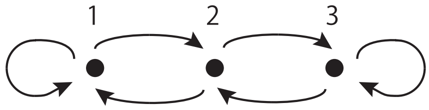
32. ある物質は 2 つの状態 A，B の何れかをとり，ある一定時間毎にどちらの状態であるか観測する．ある観測時から次の観測時まで状態が変わらない確率は，状態 A の場合で 80 %，状態 B の場合で 60 %であるとする．

(1) n 回目の観測時に状態 A を観測する確率を p_n とおく．p_n に対する漸化式を作れ．

(2) 十分時間が経った後で状態 A を観測する確率を求めよ．

（発展問題）

33. 次の有向グラフにおいて，頂点 1 から頂点 3 までの，長さ n の経路（同じ辺を通ってもよい）は何個あるか．



（第１１回の解答例）

32. (1) n 回目の観測で状態 B を観測する確率は $1-p_n$ であり，B を観測した次に A を観測する確率は $1-0.6=0.4$ である．よって $p_{n+1}=0.8p_n+0.4(1-p_n)=0.4p_n+0.4$（$n=1, 2, 3, \ldots$）.
(2) $p_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}(p_n-\frac{2}{3})$ となるので，$p_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}(p_1-\frac{2}{3})$．よって $\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{2}{3}$.

※確率遷移行列を用いた別解：n 回目の観測時に状態 A，B を観測する確率をそれぞれ p_n, q_n とおく．$p_n+q_n=1$，$p_{n+1}=0.8p_n+0.4q_n$，$q_{n+1}=0.2p_n+0.6q_n$ である．$A=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_n=\begin{bmatrix}p_n\\ q_n\end{bmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{p}_{n+1}=A\boldsymbol{p}_n$ である．A の固有多項式は $x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}$ となるので固有値は $1, \frac{2}{5}$．固有値が異なるから A は対角化可能であり，固有値 $\frac{2}{5}$ の固有空間に属するベクトルは A を掛けていくと $\mathbf{0}$ に収束する．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n\boldsymbol{p}_1$ は A の固有値 1 に対する固有空間 V_1 に属する．計算すると $V_1=\langle\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\rangle$ より，答えは $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$.

33. 隣接行列は $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ である．ただし (i,j) 成分は頂点 j から頂点 i への矢印の本数を表す．

A の固有多項式は $(x-2)(x-1)(x+1)$，固有値は $2, 1, -1$ であることがわかる．$x^n=(x-2)(x-1)(x+1)Q(x)+a(x-2)(x-1)+b(x-2)(x+1)+c(x-1)(x+1)$（$a, b, c\in\boldsymbol{R}$）とおける．$x$ に $2, 1, -1$ をそれぞれ代入すると $a=\frac{(-1)^n}{6}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{2^n}{3}$ がわかる．これより $A^n=\frac{(-1)^n}{6}(A-2E)(A-E)-\frac{1}{2}(A-2E)(A+E)+\frac{2^n}{3}(A-E)(A+E)=\frac{(-1)^n}{6}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}+\frac{2^n}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$．この $(3,1)$ 成分が求める数であるから，$\frac{(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2^n}{3}$.

第１２回の解説

[問題] 油田から様々に分岐するパイプラインを通して，目的地に原油を運びたい．各パイプラインには時間当たりの流せる量の最大値が決まっており，それを超える量を流すことはできない．このとき，運ぶ量を最大にするには各パイプラインにどれだけの流量を割り当てればよいか．

ただし，パイプラインの途中では，入って来る量と出て行く量が一致する．油田では，必要なだけいくらでも多くの原油を送り出すことができる．目的地では，必要なだけいくらでも多くの原油を受け入れることができるとする．

[定式化] 入口（source, entrance）と出口（target, sink, exit, receiver）に対応する 2 つの異なる頂点 s, t をもつ有限有向グラフ G を考える．s は矢印の終点とならず，t は矢印の始点とならない．各矢印 e_j には流せる量の最大値として，**容量** (capacity) と呼ばれる非負整数 C_j が定まっている．各矢印に**流量** (flow) と呼ばれる整数 F_j を $0 \le F_j \le C_j$ を満たすように割り当て，t に入る矢印に関する F_j の和 F が最大となるようにせよ．ただし，s, t 以外の各頂点において，入る流量の和と，出る流量の和は一致するとする．

定理 0.1 s から出る流量の和は，t に入る流量の和に等しい．

証明　一つの矢印の端点で，始点から出る流量と終点に入る流量は一致するから，それをすべての矢印に関して和を取ったものも 0 である．頂点に関する和に直すと，仮定より途中の頂点での和は 0 であるから，t に入る流量の総和から s から出る流量の総和を引いたものである．

この量を，単に流量 (total value) と呼び，F と書く．各矢印の流量の与え方を変えたときの F の最大を**最大流量** (maximum flow) という．

最大流量を求める方法として，**フォード＝ファルカーソンのアルゴリズム** (the Ford–Fulkerson algorithm) を説明しよう．入口から始めて，余分に送れる可能性がある頂点に印をつけていき，もし出口まで印がついたら余分に送れると判断して流量を増やしていく．

フォード＝ファルカーソンのアルゴリズム

(0) 初期状態として，すべての辺に流量 0 を割り当てる．s に印をつける．

(1) 頂点 v に印が付いているとする．v を端点とするすべての矢印 e に対し，もう一方の端点 w に印がついていなければ次を行う．

(1-1) e が v から w に向かうとき，もし現在の流量 f が容量 c より小さければ，w に印 v をつける．（v から w にもっと送れるので）

(1-2) e が w から v に向かうとき，もし現在の流量 f が正であれば，w に印 v をつける．（現在の流量を減らすことで結果的に w に余分に送れるので）

(2) t に印が付いたかどうか判定する．

(2a) t に印が付いたとき：t の印の頂点から逆にたどることにより，s から t まで印を付けた道（**増大道**という）が存在する．増大道に属する辺の容量を 1 増やす．全体の容量は 1 増加する．s 以外の印を全て消して，(1) を繰り返す．

(2b) t に印が付かなかったとき：印がついていてまだ (1) を行っていない頂点があれば，それを v とし (1) を繰り返す．なければ終了し，このときの流量が最大流量を与える．

定理 0.2 フォード＝ファルカーソンのアルゴリズムは最大流量を計算する．

ただし，アルゴリズムが「計算する」とは，仕様を満たす入力（今の場合，ネットワーク）に対し，有限回の手続きで停止して，正しい値を与えることをいう．

頂点集合を $V = V_0 \coprod V_1$（$s \in V_0$，$t \in V_1$）と直和分解する．このとき，V_0 に属する頂点から V_1 に属する頂点へ向かう辺 e_j の容量 C_j の和 C を，この分解による**切断** (cut) と呼ぶ．頂点集合のすべての直和分解に関する切断の最小値を**最小切断** (minimum cut) と呼ぶ．切断は流量の与え方によらず定まることに注意する．

証明　任意の流量 $\{F_j\}$ と任意の切断 $V_0 \coprod V_1$ に対し，V_0 に属する頂点から V_1 に属する頂点に向かう矢印では，流量は容量以下であり，V_1 に属する頂点から V_0 に属する頂点に向かう矢印では，流量は 0 以上であるから，$F \le C$ が成り立つ．特に，最大流量 $\le$ 最小切断 が成り立つ．

フォード＝ファルカーソンのアルゴリズムは有限回で停止する．なぜなら，t に向かう矢印に関する容量の和は有限であり，1 回の増大道が見つかれば流量が必ず 1 以上増加するからである．

停止時に，印がついている頂点の集合を V_0 とし，ついていない頂点の集合を V_1 とする．$s \in V_0$，$t \in V_1$ となり，$V = V_0 \coprod V_1$ は切断であり，対応する切断量を C とする．

頂点 v において，出る流量の和から入る流量の和を引いたものを F_v とする．v が V_0 の頂点全体を動くときの F_v の和を取ると，v が s,t 以外のとき $F_v = 0$ であり，$v = s$ では F であるから，和は F に一致する．一方，辺に関する和に直すと，V_0 の頂点同士を結ぶ辺については差引 0 であり，V_0 から V_1 への流量の和から，V_1 から V_0 への流量の和を引いたものに一致する．これ以上印をつけることができないことから，V_0 に属する頂点から V_1 に属する頂点に向かう矢印では，流量は容量と一致し，V_1 に属する頂点から V_0 に属する頂点に向かう矢印では，流量は 0 である．したがって F は C に一致する．$F \leq$ 最大流量 $\leq$ 最小切断 $\leq C = F$ が成り立つ．よって，このときの流量，容量と最大流量，最小切断はすべて一致する．

証明の最後から次がわかった．

系 0.3 (最大流量最小切断定理) 最大流量は最小切断に一致する．

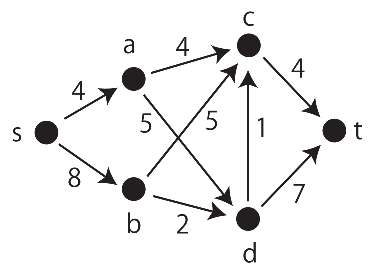
注意 0.4 容量 C_j を非負有理数としても，C_j の分母の最小公倍数を掛けることにより非負整数の場合に帰着するので定理は成り立つ．しかし C_j を非負実数とすると，最大流量は存在し最小切断と一致する（差があるとすると，十分近い有理数で近似すれば増大道が得られて矛盾する）が，アルゴリズムが停止する保証がない.（停止しない例を作れ）

なお，最大流量を与える辺流量の与え方は一意的とは限らない.（例を作れ）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第１２回（7/3）

34. 次のネットワークの s から t への最大流量を求めよ．

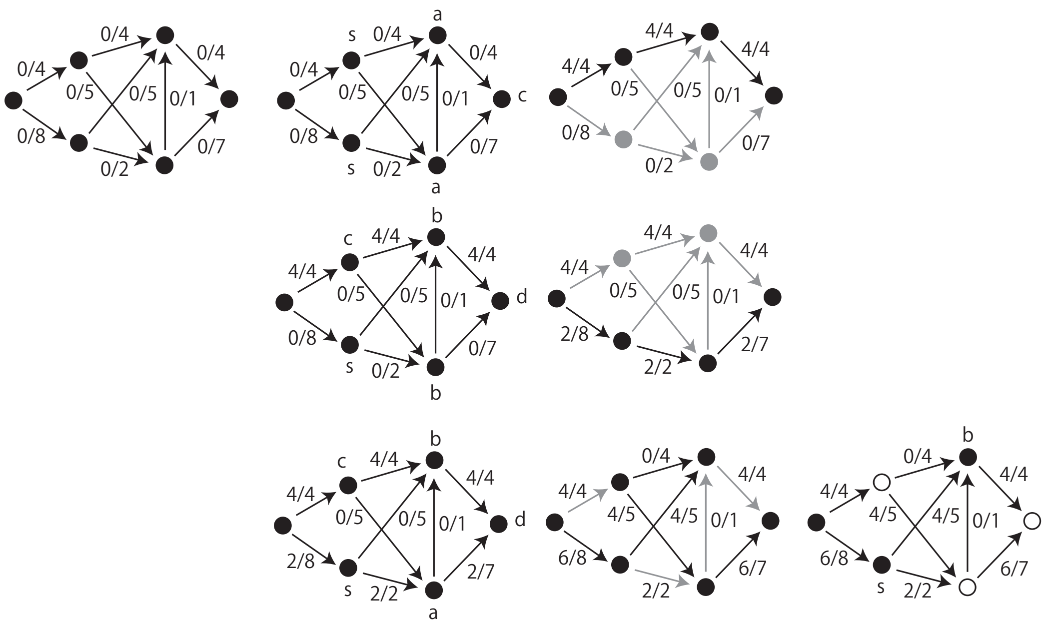


（発展問題）

35. 最大流量を与える流量が２通り以上あるネットワークの例を作れ．

（第１２回の解答例）

34. Ford–Fulkerson のアルゴリズムで求める．初期状態として，各矢印に流量 0 を割り当てる．辺につけられた数は流量/容量を表す．流量 0 に初期化する．増大道を探すと s,a,c,t が見つかるので，容量の余裕の最小値 4 だけ流量を増やす（第 1 行）．同様にして s,b,d,t の流量を 2 ずつ増やす（第 2 行）．増大道は s,b,c,a,d,t となり，途中で辺 ac の容量を 4 減らすことで全体の流量を増やせることがわかる（第 3 行）．これ以上増大道は存在せず（印が付かない頂点を白丸で表した），最大流量は $4 + 6 = 10$ となる．

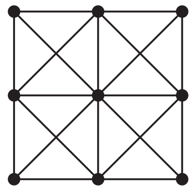


35. 例えば，ボトルネックのあと分岐して余裕ができるネットワークを作ればよい．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

離散数学入門 c（小林）第１３回（7/10）

36. 次のグラフについて，(1) 平面的であるか判定せよ．　(2)（頂点）彩色数を求めよ．



（発展問題）

37. 連結な単純平面グラフ G に対し以下の問いに答えよ．ただし G の頂点数は 3 以上であるとする．

(1) G が囲む d 辺形（$d = 3, 4, 5, \ldots$）の領域が外領域を含めてそれぞれ f_d 個あるとする．ただし，辺 e の両側に同じ領域 f がある場合は，f の辺として e を 2 回数える．オイラーの多面体定理を用いて $f_3 + f_4 + \cdots$ を頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ で表せ．

(2) 各辺は両側でどれかの領域の辺となることに注意して，辺数 $|E|$ を求めよ．

(3) K_5 は平面的でないことを示せ．

（第１３回の解答例）

36. (1) 中央の頂点および接続する辺を取り除き，改めて外側に頂点と辺を追加すると，図２左のように平面グラフとして描ける．あるいは四隅を内側に折り返すと（あるいは外周辺の中点を頂点とする斜めの正方形の辺を外に引っ張り出すと）図２右のように平面グラフとして描ける．

(2) 部分グラフとして K_4 を含むから 4 色必要．実際に 4 色で彩色できることは四色定理により保証されているが，例えば，四隅，中央，上下の辺の中点，左右の辺の中点に 4 色を割り当てればよい．

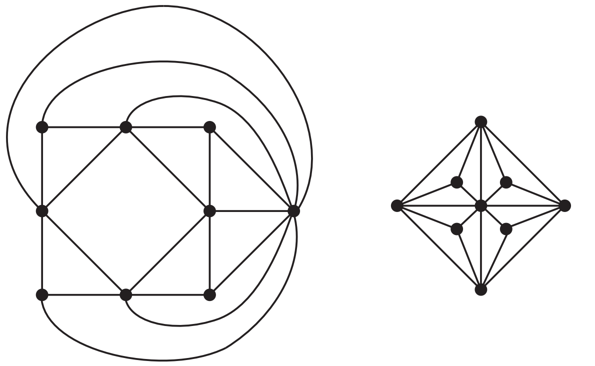


図 1: 平面的

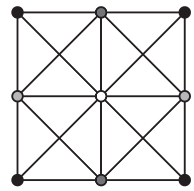


図 2: ４色

37. (1) 連結かつ頂点数が 3 以上であるので，0 辺形はない．ループがないので 1 辺形はない．多重辺がなく，連結かつ頂点数が 3 以上であるので 2 辺形はない．よって面の数を f とすると，$|F| = f_3 + f_4 + \cdots$ である．オイラーの多面体定理より $|V| - |E| + |F| = 2$ であるから，$f_3 + f_4 + \cdots = |F| = 2 - |V| + |E|$.

(2) 握手補題と同様に，領域と境界辺の対が何個あるか数えると，$2|E| = \sum_{d \geq 3} d \cdot f_d$.

(3) K_5 が平面的であったとする．$|V| = 5$，$|E| = 10$ であるから $|F| = 7$ である．一方，$3|F| = 3f_3 + 3f_4 + \cdots \leqq 3f_3 + 4f_4 + \cdots = 2|E| = 20 < 21 = 3|F|$．これは矛盾．