学修番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

# 幾何学 A（小林）第 1 回（4/6）基本的な例

**問題**　単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ について次の問いに答えよ．

(1) $S^2$ の中で $z > 0$ を満たす点からなる開集合を $U_z^+$ で表すことにする．すなわち，

$$U_z^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}.$$

$U_z^+$ の点は，$xy$ 平面に正射影した像の座標 $(x, y)$ から決まる．このように，ある座標が正または負である部分集合と，座標平面への正射影を用いて，$S^2$ 全体を覆う「座標近傍系」を完成させよ．

| 開集合 | $U_x^+$ | | | | $U_z^+$ | $U_z^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 座標 | | | | | $(x, y)$ | |

(2) $U_z^+$ のみに属する点がある．それは何か？

(3) $U_y^-$ の座標を $U_z^+$ の座標で表せ．

**発展問題**　難易度はさまざまなので，手の付くものから考えてみましょう．テキスト章末問題も参考のこと．解答のないものはレポート問題としてよい（締切はまだ先）．

**1.** (1) 単位円 $S^1$ のパラメータ表示 $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ について，長所・短所を考えてみよ．（例：パラメータ $\theta$ と点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ は一対一に対応させられるか？さらに，点が連続的に動くとき，パラメータも連続的に動けるか？点が動く長さとパラメータとの関係は？）

(2) 単位球面 $S^2$ のパラメータ表示の例を挙げ，長所・短所を考えてみよ．

(3) $n$ 次元球面 $S^n$ の極座標を与えよ．パラメータ表示が単射でないところはどこか？

**2.** $S^2$ の立体射影による 2 つの座標は，
$U_0 = \{z < 1\} \cap S^2$ において，$(X_0, Y_0) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$,
$U_1 = \{z > -1\} \cap S^2$ において，$(X_1, Y_1) = \left(\dfrac{x}{1+z}, -\dfrac{y}{1+z}\right)$
で与えられる．

(1) $(X_1, Y_1)$ を $(X_0, Y_0)$ で表せ．（ヒント：講義の図）

(2) $Z_i = X_i + \sqrt{-1}Y_i$（$i = 0, 1$）とおく．$Z_1$ を $Z_0$ で表せ．

**3.** それぞれ何という定理から従うだろうか．思い出してみよう．

(1) $A$ を実 $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ を実 $m$ 次元ベクトルとし，$A$ の階数を $r$ とする．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$）の解集合を $X$ とする．
$X$ が空でないとき，$X$ は $\boldsymbol{R}^n$ の座標のある $(n-r)$ 個をパラメータとして，一対一にパラメータ表示される．

(2) $f(x, y)$ を $\boldsymbol{R}^2$ 上の $C^1$ 級関数とし，点 $P(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ において $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ であるとする．
十分小さな正数 $\varepsilon$ を取ると，$V := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ として，

$$M := \{(x, y) \in V \mid f(x, y) = f(a, b)\}$$

は $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ により一対一にパラメータ表示される．さらに，$M$ 上では $y$ はパラメータ $x$ の $C^1$ 級関数である．

※次回までに，位相，同相写像，ハウスドルフ空間について，定義を確認しておくこと．
テキスト：「多様体の基礎」，松本幸夫，東京大学出版会．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

**幾何学 A（小林）第 2 回（4/13）多様体**

**問題**　(1) 次の空白を埋めてみよう．

空でない位相空間 $M$ が $m$ 次元 $C^\infty$ **級（微分可能）多様体**[1] であるとは次の 3 条件を満たすことである．

- $M$ は位相空間として ＿＿＿＿＿＿＿ 空間である．
- $M$ の ＿＿＿＿ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と，各 $U_\alpha$ から $\boldsymbol{R}^m$ の ＿＿ 集合 $U'_\alpha$ への ＿＿＿ 写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha$ が指定されている．
- 座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が，定義されているところで ＿＿＿＿ である．

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $M$ の $C^\infty$ 級**座標近傍系**という．

(2) (1) の条件が満たされているとする．$U$ を $M$ の空でない開集合とすると，$U$ は $M$ の（$m$ 次元）**開部分多様体**になる．$U$ の座標近傍系を与えよ．

(3) 単位円 $S^1$ の正射影による座標近傍系を与え，座標変換が (1) の条件を満たすことをどこか一つ確かめよ．

[1] 可微分多様体，$C^\infty$ 多様体ともいう．

発展問題

**4.** 平面において，単位円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $P(x,y)$ を考える．点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ とする．

(1) $P \neq A$ のとき直線 $AP$ が $y$ 軸と交わる点の $y$ 座標を $t$ とする．$(x,y)$ を $t$ で表せ．

(2) $P \neq B$ のとき直線 $BP$ と $y$ 軸の交点の $y$ 座標を $s$ とする．$P \neq A$ でもあるとき $s$ を $t$ で表せ．

(3) $\{(C \setminus \{A\}, t), (C \setminus \{B\}, s)\}$ は $C$ の $C^\infty$ 級多様体としての座標近傍系になることを示せ（$C$ の開被覆になり，座標が同相写像であり，座標変換が $C^\infty$ 級であることを示せ）．

**5.** ○，×，△はそれぞれ $C^\infty$ 級多様体の構造をもつか？

**6.** $\boldsymbol{R}^3$ の中で方程式 $x^2+y^2-z^2=0$ を満たす点集合を $S$ とする．

(1) $S$ を図示せよ．計算機を用いてもよいが，原点の近くをきちんと描くこと．

(2) $S$ には位相多様体の構造が入らないことを示せ．

**7.** (1) 位相空間 $M$ の 2 つの $C^\infty$ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ が同値であることの定義を述べよ．

(2) $S^2$ の $C^\infty$ 級座標近傍系として，立体射影によるものと正射影によるものとが同値か確かめたい．例えば $U_0 \cap U_x^+$ において考える．$U_0$ 上の座標 $(X_0, Y_0)$ を $U_x^+$ 上の座標 $(y,z)$ で表す座標変換が $C^\infty$ 級であるか調べよ．反対に，$(y,z)$ を $(X_0,Y_0)$ で表す座標変換が $C^\infty$ 級であるか調べよ．

**8.** 次の関数のうちで，$\boldsymbol{R}$（$x$ 軸）上の局所座標として，同値でないものはどれか．
$x$，$x^3$，$e^{3x}$

**9.** $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$，$(N, \{(V_\beta, \psi_\beta)\})$ を $C^r$ 級多様体とする．

(1) 直積 $M\times N$ は積位相でハウスドルフ空間になることを示せ．
ただし，$M\times N$ の積位相とは，射影 $M\times N \to M$，$M \times N \to N$ がともに連続になる最弱の位相である．具体的に書くと，$M$ の任意の開集合 $U$ に対する（射影の逆像）$U\times N$ と，$N$ の任意の開集合 $V$ に対する $M \times V$ とから生成される位相[2]である．

(2) $M\times N$ は $\{(U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \psi_\beta))\}$ を座標近傍系として $C^r$ 級多様体になることを示せ．

第 1 回問題の解答

(1)

| 開集合 | $U_x^+$ | $U_x^-$ | $U_y^+$ | $U_y^-$ | $U_z^+$ | $U_z^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 座標 | $(y,z)$ | $(y,z)$ | $(x,z)$ | $(x,z)$ | $(x,y)$ | $(x,y)$ |

(2) 点 $(0,0,1)$.「北極」

(3) $U_y^-$ の座標 $(x,z)$ を $U_z^+$ の座標 $(x,y)$ で表す．$S^2$ 上で $x^2+y^2+z^2=1$ であるから $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ である．$U_z^+$ 上では $z>0$ であるから $(x,z)=(x,\sqrt{1-x^2-y^2})$.

**2.** (1) 球面上の点 P に対し，$xy$ 平面と直線 NP・直線 SP との交点をそれぞれ Q，R とおくと，$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=1$ である（授業で書いた図から三角形の相似を用いて示せる）．$Y_1$ を R の $y$ 座標の $-1$ 倍と定義したことに注意すると $(X_1,Y_1)=\frac{1}{X_0^2+Y_0^2}(X_0,-Y_0)$.

(2) 複素座標に書き換えると $Z_1=\frac{1}{Z_0}$.

**3.** (1) 連立一次方程式の解の構造定理．(2) 陰関数定理．

[2]指定された部分集合族から，任意個の結びや有限個の交わりをとる操作を有限回繰り返して得られる部分集合を開集合とする位相のこと．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

幾何学 A（小林）第 3 回（4/20）可微分写像

**問題**　(1) $M$，$N$ を $C^\infty$ 級多様体とし，それぞれの極大座標近傍系を $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，$\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ とする．

連続写像 $F : M \to N$ が $C^\infty$ **級写像**であることの定義を書いてみよう．

(2) 関数 $F : S^2 \to \boldsymbol{R}$ を $S^2 \ni (x,\, y,\, z) \mapsto F(x,\, y,\, z) = x + y + z$ で定める．$S^2$ の座標近傍 $U_z^+$ において $F$ を局所座標で表し，それが $C^\infty$ 級関数であることを確認してみよう．

発展問題

**10.** $\boldsymbol{R}^3$ の中で方程式 $x^2+y^2-z^2=-1$ を満たす点集合を $S$ とする．

(1) $S$ を図示せよ．

(2) $S$ 上の $C^\infty$ 級座標近傍系を一つ与えよ．(できれば座標関数 $x,\ y,\ z$ が $S$ 上の $C^\infty$ 級関数となるものを与えよ．)

**11.** 関数 $f(x)=|x|$ のグラフ $\Gamma=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid y=f(x)\}$ を考える．本問では，$\Gamma$ は1個の座標近傍 $(U,\varphi)$（$U=\Gamma$，$\varphi(x,y)=x$）により $C^\infty$ 級多様体とみなす．関数 $y$ が $\Gamma$ 上の $C^\infty$ 級関数であるか，判定せよ．

**12.** $C^r$ 級多様体 $M,\ N$ は，その間に $C^\infty$ 級同相写像 $f:M\to N$ が存在するとき $C^\infty$ 級**微分同相**であるという．$C^r$ 級微分同相であることは同値関係であることを示せ．

**13.** $\boldsymbol{R}$ の空でない開区間は互いに $C^\infty$ 級微分同相か？

**14.** $\boldsymbol{R}^3$ 内の円筒 $x^2+y^2=1$（$z$ は任意）は，$\boldsymbol{R}^2\setminus\{O\}$ と $C^\infty$ 級微分同相であることを示せ．

第2回問題の解答

(1) 空でない位相空間 $M$ が $m$ 次元 $C^\infty$ **級（微分可能）多様体**であるとは次の3条件を満たすことである．

- $M$ は位相空間として <u>ハウスドルフ</u> 空間である．
- $M$ の <u>開被覆</u> $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と，各 $U_\alpha$ から $\boldsymbol{R}^m$ の <u>開</u> 集合 $U'_\alpha$ への <u>同相</u> 写像 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to U'_\alpha$ が指定されている．
- 座標変換 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が，定義されているところで <u>$C^\infty$級</u> である．

(2) $M$ の各座標近傍 $U_\alpha$ と $U$ の交わりは $U$ の開集合であり，その上に局所座標 $\varphi_\alpha$ を制限すれば，像への同相写像を与える．すなわち，座標近傍系は $\{(U\cap U_\alpha,\ \varphi_\alpha|_{U\cap U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ である．ただし厳密には，$\varphi_\alpha|_{U\cap U_\alpha}$ の終域は $\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)$ とする．

(3) 座標 $x,y$ がそれぞれ正または負になる開集合を考えて，$U_x^+=\{P\in S^1\mid x>0\}$ などと表すことにする．座標近傍系は $\{(U_x^+,y),\ (U_x^-,y),\ (U_y^+,x),\ (U_y^-,x)\}$ である．例えば $U_x^+\cap U_y^-$（これは点 $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ を含むので空ではない）において，$U_x^+$ の座標 $y$ を $U_y^-$ の座標 $x$ で表そう．$x^2+y^2=1$ と $y<0$ より，$y=-\sqrt{1-x^2}$ となる．

**7.** (1) 和集合が $C^\infty$ 級座標近傍系であること．すなわち，$U_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ である任意の $\alpha \in A$，$\beta \in B$ に対し，定義されている範囲で $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ および $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ が $C^\infty$ 級写像であること．

(2) $(X_0, Y_0)$ を $(y, z)$ で表す．$U_x^+$ においては $x > 0$ より $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ であるから，$X_0 = \frac{x}{1-z} = \frac{\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z}$，$Y_0 = \frac{y}{1-z}$ となる．

$U_x^+$ においては根号内は正であり，$U_0$ においては $z < 1$ より分母は正（非零）であるから，$X_0, Y_0$ は $(y, z)$ の $C^\infty$ 級関数である．

$X_0^2 + Y_0^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}$ である．$z$ について解くと $z = \frac{X_0^2+Y_0^2-1}{X_0^2+Y_0^2+1}$．よって $y = (1-z)Y_0 = \frac{2Y_0}{X_0^2+Y_0^2+1}$．$y, z$ は $X_0, Y_0$ の有理式で表され，分母は常に正であるから，$C^\infty$ 級である．

他の組合せも同様であり，立体射影による座標近傍系と正射影による座標近傍系とは同値である．

**8.** $y = x^3$，$z = e^{3x}$ とおく，座標の動く範囲は，$x \in \boldsymbol{R}$，$y \in \boldsymbol{R}$，$z > 0$ である．$x, y, z$ を互いに他で表した座標変換が $C^r$ 級であるか調べる．

まず，任意の $r \geq 0$ に対し，$y, z$ は $x$ の $C^r$ 級関数である．また，$x = \frac{1}{3}\log z$ は $z$ の $C^r$ 級関数である．よって $x$ と $z$ は同値な局所座標を表す．$x$ を $y$ で表すと $x = \sqrt[3]{y}$ となる．これは $y$ の連続関数であるが，$y = 0$ で微分可能でない．よって $x$ と $y$ は，$C^0$ 級多様体の座標としては同値であるが，$C^r$ 級（$r > 0$）多様体の座標としては同値でない．座標の同値は同値関係であるので，$y$ と $z$ についても同じである．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

# 幾何学 A（小林）第 4 回（4/27）接ベクトル

**問題**　$0 < a < 1$ として，曲線

$$c : \boldsymbol{R} \ni t \mapsto (a\cos t,\, a\sin t,\, \sqrt{1-a^2}) \in S^2$$

を考える．$P = c(0) = (a,\, 0,\, \sqrt{1-a^2})$ とおく．

(1) $c$ の像が $S^2$ に属することを確かめよ．

(2) $c$ を座標近傍 $(U_z^+,\, (x, y))$ で表示し，$c$ が $S^2$ 上の $C^\infty$ 級曲線であることを確かめよ．

(3) $f$ を $P$ の $S^2$ におけるある開近傍で定義された $C^\infty$ 級関数とする．
$U_z^+$ において $\left.\dfrac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$ を用いて表せ．

(4) $P$ における $c$ に沿った方向微分 $v_c$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P$ と $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$ で表せ．

※過去のプリント：`http://www.comp.tmu.ac.jp/masanori/Lecture/18kikagakuA.pdf`

## 発展問題

**15.** $0 \le R_0 < R_1 \le \infty$，$-\infty \le z_0 < z_1 \le \infty$ とするとき，次の $A$ と $C$ が $C^\infty$ 級微分同相であることを示せ．

$$A = \{(X, Y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid R_0 < \sqrt{X^2+Y^2} < R_1\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ z_0 < z < z_1\} = S^1 \times (z_0, z_1).$$

**16.** $M$ を可微分多様体とし，$M$ の点 $P$ をとる．$P$ の近傍で定義された $C^\infty$ 級関数 $f$ に対し実数値 $v(f)$ を与える写像 $v$ が $P$ における**導分・微分**（derivation）であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

(o) （局所性）関数 $f, g$ が $P$ のある近傍で一致するならば $v(f) = v(g)$，

(i) （$\boldsymbol{R}$ 線形性）$a \in \boldsymbol{R}$ に対し $v(af) = av(f)$，$v(f+g) = v(f) + v(g)$，

(ii) （Leibniz 則）$v(fg) = f(P)v(g) + v(f)g(P)$.

$P$ における導分の全体を $\mathrm{Der}_P\, M$ あるいは $D_p(M)$ で表す．

$a \in \boldsymbol{R}$，$u, v \in \mathrm{Der}_P\, M$ に対し，$(av)(f) := a(v(f))$，$(u+v)(f) := u(f) + v(f)$ と定める．$av,\, u+v \in \mathrm{Der}_P\, M$ となることを（接空間との同型によらず直接）確かめよ．

## 第 3 回問題の解答

(1) $M$ の任意の点 $P$ に対し，ある $\alpha \in A$ と $\beta \in B$ で $P \in U_\alpha$，$f(U_\alpha) \subset V_\beta$ を満たすものが存在し，$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が $C^\infty$ 級写像であること．

(2) $U_z^+$ における局所座標 $(x, y)$ で表す．$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ であるから $x+y+z = x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

（発展問題）

**13.** 次の $C^\infty$ 級微分同相写像がある．

$$\begin{array}{ccccc} & e^x = y & & \tan^{-1} y = z & \\ (-\infty, \infty) & \rightleftarrows & (0, \infty) & \rightleftarrows & (0, \frac{\pi}{2}) \\ & x = \log y & & y = \tan z & \end{array}$$

空でない任意の開区間 $(a, b)$（$\infty \le a < b \le \infty$）は，ある可逆なアフィン変換 $f(x) = kx + l$（$k \neq 0$）によって上の 3 つの区間のいずれかと $C^\infty$ 級微分同相であることが確かめられる．実際，有界なら $f(x) = \frac{2(b-a)}{\pi}x + a$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ を $(a, b)$ に移す．$a = -\infty$ なら $f(x) = -x + b$ が $(0, \infty)$ を $(-\infty, b)$ に移す．$b = \infty$ なら $f(x) = x + a$ が $(0, \infty)$ を $(a, \infty)$ に移す．以上より，$\boldsymbol{R}$ の空でない開区間は互いに $C^\infty$ 級微分同相である．

**14.** 円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ を $C$ で表す．$f : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{O\} \to C$ を

$$(X, Y) \mapsto \left( \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \log\sqrt{X^2+Y^2} \right)$$

で定めると，この逆写像は $(x, y, z) \mapsto (xe^z, ye^z)$ で与えられる．これらは連続であるから，同相写像である．

$C = S^1 \times \boldsymbol{R}$ より，$S^1$ の部分は正射影による座標で考えると，$C$ の局所座標として，$x, y$ の一方と $z$ からなるものが取れる．$(X, Y)$ との対応は互いに $C^\infty$ 級であることが確かめられるから（略），$\boldsymbol{C}^2 \setminus \{O\}$ と $C$ は $C^\infty$ 級微分同相である．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

## 幾何学 A（小林）第 5 回（5/11）接空間

**問題**　$P \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{O\}$ において，直交座標 $(x, y)$ と極座標 $(r, \theta)$ を考える．

(1) $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_P$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$ で表せ（連鎖律を用いよ）．

(2) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_P$ で表せ．

発展問題

**17.** （削除）

**18.** 教科書で $T_P(M) = D_P^\infty(M)$ であることを学習し，簡潔にまとめてみよ．

**19.** $C^\infty$ 級多様体 $M$ 上の $C^\infty$ 級関数の全体を $C^\infty(M)$ で表す．$C^\infty(M)$ は関数のスカラー倍・和・積によって，$\boldsymbol{R}$ 代数になる．$M$ の開集合 $U$ に対し（部分多様体とみて）$C^\infty(U)$ が定まる．

以下では点 $P \in M$ をひとつ決めて考える．$P$ の開近傍（$= P$ が属する開集合）$U$ すべてに関する，$C^\infty(U)$ の和集合 $\bigcup_{P \in U:\,\text{開}} \boldsymbol{C}^\infty(U)$ を $\mathscr{F}$ とする．

(1) $\mathscr{F}$ の 2 元 $U_1 \xrightarrow{f_1} \boldsymbol{R}$，$U_2 \xrightarrow{f_2} \boldsymbol{R}$ に対し，$f_1 \sim_P f_2$ であるとは，$P \in V \subset U_1 \cap U_2$ を満たす開集合 $V$ が存在して，$f_1|_V = f_2|_V$ となる（すなわち，$f_1$ と $f_2$ は $V$ に制限すると一致する）ことと定める．

$\sim_P$ は $\mathscr{F}$ に同値関係を定めることを示せ．

(2) $\mathscr{F}$ の 2 元 $f : U \to \boldsymbol{R}$，$g : V \to \boldsymbol{R}$ に対し，$f + g : U \cap V \to \boldsymbol{R}$ が $\mathscr{F}$ の元として定まる（$U \cap V$ は $P$ の開近傍である）．

$f_1 \sim_P f_2$，$g_1 \sim_P g_2$ ならば $f_1 + g_1 \sim_P f_2 + g_2$ であることを示せ．

※掛け算も同様である．$\mathscr{F}$ の $\sim_P$ による商集合を $C_P^\infty$ と書くと，$C_P^\infty$ は代表元の演算により単位的可換環になる．

第 **4** 回問題の解答

(1) $(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (\sqrt{1-a^2})^2 = a^2 + (1-a^2) = 1$.

(2) $0 < a < 1$ より $\sqrt{1-a^2} > 0$ であるから，$c$ の像は $U_z^+$ に含まれる．$\boldsymbol{R}$ の（局所）座標 $t$ と $U_z^+$ における局所座標 $(x, y)$ による $c$ の座標表示は，$t \mapsto (x, y) = (a\cos t,\, a\sin t)$ となる．各成分は $t$ に関する $C^\infty$ 級関数であるから，$c$ は $C^\infty$ 級写像である．

(3) （ここでの $f$ は授業での $f_z^+$ である．）(2) の座標で表すと

$$\frac{d}{dt}\left(f(a\cos t,\, a\sin t)\right)\Big|_{t=0} = -a\sin t|_{t=0}\frac{\partial f}{\partial x}(P) + a\cos t|_{t=0}\frac{\partial f}{\partial y}(P) = a\frac{\partial f}{\partial y}(P).$$

(4) (3) より $v_c = a\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$.

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

## 幾何学A（小林）第6回（5/18）可微分写像の微分

**問題**　(1) 以下の下線を埋めてみよう．

$C^\infty$ 級多様体 $M^m$ の点 $P$ における**接ベクトル** $v$ は，$P$ の開近傍で定義された $C^\infty$ 級関数の全体 $\mathscr{F}$ に対する**微分**として定義される．すなわち $v : \mathscr{F} \to \boldsymbol{R}$ は，局所性，__________，__________ を満たす．以下のように方向微分としての具体的な表示がある．

速度ベクトル：$P$ を通る $C^\infty$ 級曲線 $c : (a,b) \to M$（$P = c(t_0)$）に対する

$$v_c : f \mapsto \underline{\hspace{3cm}}.$$

偏微分の一次結合：$P$ における局所座標 $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$ を選んだとき，

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \quad (a_1, \ldots, a_m \in \boldsymbol{R}).$$

特に，__________（$i = 1, \ldots, m$）を基底として，成分表示 ${}^t[a_1 \ \cdots \ a_m] \in \boldsymbol{R}^m$ で表せる．

$P$ における接ベクトルの全体 $T_P(M)$ は**接空間**と呼ばれる実線形空間になる．

さらに $F : M^m \to N^n$ を $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像とする．$P \in M$，$Q = F(P) \in N$ とし，$\mathscr{G}$ を $Q$ の開近傍で定義された $C^\infty$ 級関数の全体とする．このとき，接空間の間の線形写像

$$dF : T_P(M) \to T_Q(N)$$

が以下で定まる：

$$v \in T_P(M) \text{ に対し，}\quad dF(v) : g \in \mathscr{G} \mapsto \underline{\hspace{2cm}} \in \boldsymbol{R}.$$

これは曲線 $c$ の速度ベクトルに対しては曲線 $F \circ c$ の速度ベクトルを与える．また，$P$，$Q$ における局所座標 $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$，$\psi_\beta = (y_1, \ldots, y_n)$ に対応する成分表示を用いると，表現行列は Jacobi 行列

$$(JF_{\beta\alpha})_P = \underline{\hspace{3cm}}$$

になる．

(2) $F(x,y) := \log|xy|$ とし，$F : (\boldsymbol{R}^\times)^2 \to \boldsymbol{R}$ を $z = F(x,y)$ により定める．$(\boldsymbol{R}^\times)^2$ の点 $P(a,b)$ において，$(dF)_P(\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P)$ を計算せよ．

ただし始域 $(\boldsymbol{R}^\times)^2$ は $xy$ 平面から2つの軸を除いた開部分多様体とし（したがって座標として $(x,y)$ がとれる），終域 $\boldsymbol{R}$ の座標を $z$ とする．

発展問題

**20.** $n \in \boldsymbol{Z}$ として写像 $F : S^1 \to S^1$，$(\cos\theta,\, \sin\theta) \mapsto (\cos n\theta,\, \sin n\theta)$ を考える．
(1) $F$ はきちんと定義されていることを示せ．($S^1$ の点 $P$ に対し，$P = (\cos\theta,\, \sin\theta)$ となる $\theta$ は一つではないが，どの $\theta$ を選んでも像 $F(P)$ は同じ点になることを示せ．)
(2) $F$ は $C^\infty$ 級写像であることを確かめよ．
(3) 偏角 $\theta$ を局所座標とする座標近傍系をとり，微分 $dF$ を表示せよ．

**21.** $M = \{(x,\, y,\, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\, z > 0\}$ と $N = \{(x,\, y,\, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ の座標近傍系を適当にとり，$M$ から $N$ への $C^\infty$ 級微分同相写像 $F$ を1つ与えて，その微分 $dF$ を計算せよ．

**22.** $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $F(x, y) = (x^2, xy, y^2)$ で与える．点 $P(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ における $(dF)_P$ の階数を（$P$ によって場合わけをして）求めよ．

第５回問題の解答

(1) $P$ の座標を直交座標で $(x_0, y_0)$，極座標で $(r_0, \theta_0)$ とする．$P$ の近傍で定義された $C^\infty$ 級関数 $f(x, y)$ に対し，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を代入して $r, \theta$ でそれぞれ偏微分する．連鎖律（合成関数の微分）より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} &&= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, \\
\frac{\partial f}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} &&= (-r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

よって $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_P = \cos\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P + \sin\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$，
$\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_P = -r_0 \sin\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P + r_0\cos\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$.
(2) (1) から逆に解くと，
$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P = \cos\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_P - \dfrac{\sin\theta_0}{r_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_P$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P = \sin\theta_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)_P + \dfrac{\cos\theta_0}{r_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_P$.
（発展問題）

**17.** 設定ミスのため，削除．ごめんなさい．

点 $P$ から北極に向かう曲線のパラメータを $z$ に取ることができる．このとき，$U_z^+$ の座標を用いて速度ベクトルを表示せよ，という問題のつもりでした．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

幾何学 **A**（小林）第 **7** 回（**5/25**）写像の局所的性質

問題

(1) $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像 $F : M^m \to N^n$ の臨界点，臨界値の定義を述べよ．

(2) $F : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を $(x, y) \mapsto x$ で与える．

　$(i)$ $F$ を適当な局所座標で表し，ヤコビ行列を計算せよ．

　$(ii)$ $F$ の臨界点と臨界値を求めよ．

発展問題

**23.** 正方形 $(-1,1)\times(-1,1)$ を 4 枚用意し，$U_0, U_1, U_2, U_3$ と名前を付けておく．$U_i$（$0 \le i \le 3$）の座標を $(x_i, y_i)$ とする．

(1) 次の座標変換で $U_0$ と $U_1$ を貼り合わせてできる図形を図示し，円環（annulus）$\{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$ と $C^\infty$ 級微分同相であることを示せ．（長方形の両端を「同じ向きに貼り合わせる」という．）

$$x_1 = \begin{cases} x_0+1 & -1<x_0<0 \\ x_0-1 & 0<x_0<1 \end{cases} \quad , \quad y_1 = y_0$$

(2) (1) において $y_1 = -y_0$ としたとき，貼り合わせてできる図形を図示せよ．（長方形の両端を「反対向きに貼り合わせる」という．）

(3) (1) と同じように $U_0$ と $U_1$ を貼り合わせ，$U_2$ と $U_3$ も貼り合わせる．

$$x_3 = \begin{cases} x_2+1 & -1<x_2<0 \\ x_2-1 & 0<x_2<1 \end{cases} \quad , \quad y_3 = y_2$$

$U_0$ と $U_2$ を次の式で貼り合わせるとき，$U_1$ から $U_3$ への座標変換を求めよ．

$$x_2 = -x_0, \quad y_2 = \begin{cases} y_0+1 & -1<y_0<0 \\ y_0-1 & 0<y_0<1 \end{cases}$$

(4) 長方形の 2 つの対辺を，それぞれ同じ向きまたは反対向きに貼り合わせる方法は，同じ・同じ，同じ・反対，反対・反対の 3 種類ある．それぞれの場合にどのような形になるか？（自由記述）

**24.** 写像 $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$，$(x_1,\, x_2) \mapsto (y_1,\, y_2) := (x_1+x_2,\, x_1x_2)$ に対し次の問いに答えよ．

(1) 点 $(x_1,\, x_2)$ における $F$ のヤコビアン $\det\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ を計算せよ．

(2) $F$ の臨界点集合・臨界値集合を求めよ．

(3) $F$ の像を求めて図示せよ．$Q \in \boldsymbol{R}^2$ とするとき，$F^{-1}(Q)$ の点の個数を（場合分けして）求めよ．

**25.** $n$ 次実正方行列の全体を $M_n(\boldsymbol{R})$ で表し，$n$ 次実対称行列の全体を $S_n(\boldsymbol{R})$ で表すことにする．（$M_n(\boldsymbol{R})$ は成分により $\boldsymbol{R}^{n^2}$ とみなす）．

(1) $S_n(\boldsymbol{R})$ は成分 $x_{ij}$（$i \le j$）を座標関数として可微分多様体になることを確かめ，その次元を求めよ．

(2) 正方行列は一意的に対称行列と交代行列の和に分解される．すなわち，任意の $P \in M_n(\boldsymbol{R})$ に対し，$P = S + A$，${}^tS = S$，${}^tA = -A$ となる $S,\, A$ が一意的に存在する．$P$ に対し $S$ を与える写像 $F : M_n(\boldsymbol{R}) \to S_n(\boldsymbol{R})$ は $C^\infty$ 級写像であることを示せ．

(3) $(dF)_P$ の階数を求めよ．

**26.** $n$ 次実正方行列 $A$ に対し行列式 $\det A$ を与える関数 $\det : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は，成分の多項式で表されるので $C^\infty$ 級関数である

(1) $n = 2$ とする．$P \in M_2(\boldsymbol{R})$ における微分 $d(\det)_P$ が零射になるのは，$P = O$ であることと同値であることを示せ．（ヒント：ヤコビ行列は？）

(2) $n$ が一般のとき，$P \in M_n(\boldsymbol{R})$ における $d(\det)_P$ の階数を，$P$ の階数により場合分けして求めよ．

## 第６回問題の解答

(1) $C^\infty$ 級多様体 $M^m$ の点 $P$ における**接ベクトル** $v$ は，$P$ の開近傍で定義された $C^\infty$ 級関数の全体 $\mathscr{F}$ に対する**微分**として定義される．すなわち $v : \mathscr{F} \to \boldsymbol{R}$ は，局所性，<u>$\boldsymbol{R}$ 線形性</u>，<u>Leibniz 則</u> を満たす．以下のように方向微分としての具体的な表示がある．

速度ベクトル：$P$ を通る $C^\infty$ 級曲線 $c : (a, b) \to M$（$P = c(t_0)$）に対する

$$v_c : f \mapsto \underline{\left.\frac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=t_0}}.$$

偏微分の一次結合：$P$ における局所座標 $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$ を選んだとき，

$$v = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \quad (a_1, \ldots, a_m \in \boldsymbol{R}).$$

特に，$\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P}$（$i = 1, \ldots, m$）を基底として，成分表示 ${}^t[a_1 \ \cdots \ a_m] \in \boldsymbol{R}^m$ で表せる．

$P$ における接ベクトルの全体 $T_P(M)$ は**接空間**と呼ばれる実線形空間になる．

さらに $F : M^m \to N^n$ を $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像とする．$P \in M$，$Q = F(P) \in N$ とし，$\mathscr{G}$ を $Q$ の開近傍で定義された $C^\infty$ 級関数の全体とする．このとき，接空間の間の線形写像

$$dF : T_P(M) \to T_Q(N)$$

が以下で定まる：

$$v \in T_P(M) \text{ に対し，} \quad dF(v) : g \in \mathscr{G} \mapsto \underline{v(g \circ F)} \in \boldsymbol{R}.$$

これは曲線 $c$ の速度ベクトルに対しては曲線 $F \circ c$ の速度ベクトルを与える．また，$P$，$Q$ における局所座標 $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)$，$\psi_\beta = (y_1, \ldots, y_n)$ に対応する成分表示を用いると，表現行列は Jacobi 行列

$$(JF_{\beta\alpha})_P = \underline{\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi_\alpha(P))\right]}$$

になる．

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}$ より $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) = \dfrac{1}{a}$ に注意する．

解１：$c(t) = (x, y) = (a + t, b)$（$t$ 十分小）で表される $\boldsymbol{R}^2$ 内の $C^\infty$ 級曲線を考えると，$v_c = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P$ である．

$F(a, b)$ の近傍で定義された任意の $C^\infty$ 級関数 $f(z)$ に対し，$\dfrac{d}{dt} f(F(c(t)))|_{t=0} = \dfrac{1}{a}\dfrac{df}{dz}(F(P))$ である．

よって $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P \mapsto \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{d}{dz}\right)_{F(P)}$．

解２：$v = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P$ とおくと，$F(a, b)$ の近傍で定義された任意の $C^\infty$ 級関数 $f(z)$ に対し，

$(dF)_P(v)(f) = v(f \circ F) = \dfrac{\partial f(F(x, y))}{\partial x}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(P)\dfrac{df}{dz}(F(P)) = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{df}{dz}\right)(F(P))$ である．

よって $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P \mapsto \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{d}{dz}\right)_{F(P)}$.

解３：$(dF)_P$ の表現行列はヤコビ行列 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b}\end{pmatrix}$ である．

$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P = 1\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_P + 0\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_P$ の座標表示は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ である．$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{a}$ より $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{d}{dz}\right)_{F(P)}$.

（発展問題）

**20.** (1) $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ となるのは $\varphi - \theta = 2k\pi$ となる整数 $k$ が存在することと同値である．このとき，$n\varphi - n\theta = n(\varphi - \theta) = 2nk\pi$ であり $nk$ は整数であるから，$(\cos n\theta, \sin n\theta) = (\cos n\varphi, \sin n\varphi)$ が成り立つ．よって $F$ は $\theta$ の取り方によらず定まる．

(2) 偏角 $\theta$ を局所座標にとり，$U_0 := \{x > -1\} \cap S^1$ で $-\pi < \theta < \pi$，$U_1 := \{x < 1\} \cap S^1$ で $0 < \theta < 2\pi$ とする．

例えば点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ が $P \in U_1$ かつ $F(P) \in U_1$ を満たすとき，$2k\pi < n\theta < 2(k+1)\pi$ となる整数 $k$ が存在する．そのように $P$ の座標近傍を小さく取り換えて $F$ を座標表示すると，$F : \theta \mapsto n\theta - 2k\pi$ となる．これは $\theta$ の１次関数であるから，$C^\infty$ 級写像である．他の場合も同様であるから，$F$ は $C^\infty$ 級写像である．

(3) (2) より，$(dF)_P : \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_P \mapsto n\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_P$.

**22.** $F$ のヤコビ行列を計算すると $(JF)_P = \begin{pmatrix}2x & 0\\ y & x\\ 0 & 2y\end{pmatrix}$.

２列からなるから階数は高々2 である．$x \neq 0$ のとき第１行と第２行が一次独立である．$y \neq 0$ のとき第２行と第３行が一次独立である．よってこれらのとき階数は２．$x = y = 0$ のときヤコビ行列は零行列であるから階数は０.

# 幾何学 A（小林）中間試験（6/1）

**1.** 空間曲線 $c : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を次で与える．

$$(x, y, z) = c(t) = (\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t,\ 2t)$$

P$= c(0)$ における $c$ に沿った微分 $v_c$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_{\mathrm{P}}$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_{\mathrm{P}}$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)_{\mathrm{P}}$ で表せ．

**2.** $\boldsymbol{R}^3$ 内の球面 $S^2 = \{(x,\ y,\ z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$，点 N$(0,\ 0,\ 1)$ に対し次の問いに答えよ．

(1) $S^2$ 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ が N と異なる点であるとき，直線 NP と $xy$ 平面との交点を Q$(X_0,\ Y_0,\ 0)$ とする．$(x,\ y,\ z)$ を $X_0,\ Y_0$ で表せ．

(2) 適当に座標近傍系を 1 つ選び，$S^2$ が $C^\infty$ 級多様体であることを示せ．

(3) 写像 $F : S^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $(x,\ y,\ z) \mapsto (x,\ y)$ で定める．$F$ は $C^\infty$ 級写像であることを示せ．

(4) (3) の $F$ の臨界値集合を求めよ．

解答例

**1.** P の近傍で定義された $C^\infty$ 級関数 $f(x,y,z)$ に対し，

$$v_c(f) = \frac{d}{dt}f(c(t))\bigg|_{t=0} = \left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bigg|_{t=0}$$
$$= \left\{(-\sin t - \cos t)\frac{\partial f}{\partial x} + (-\sin t + \cos t)\frac{\partial f}{\partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\bigg|_{t=0}$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(P).$$

よって $v_c = -\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_{\mathrm{P}} + \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_{\mathrm{P}} + 2\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)_{\mathrm{P}}$.

**2.** (1) $\left(\dfrac{2X_0}{X_0^2+Y_0^2+1}, \dfrac{2Y_0}{X_0^2+Y_0^2+1}, \dfrac{X_0^2+Y_0^2-1}{X_0^2+Y_0^2+1}\right)$.

(2) 以下の点について説明をする（略）.

- $S^2$ は例えば点 N を含むから空でない.
- $\boldsymbol{R}^3$ は距離空間だからハウスドルフ空間であり，部分空間である $S^2$ もハウスドルフ空間である.
- 開被覆 $\bigcup_\alpha U_\alpha$ を例示する.
- 局所座標 $\varphi_\alpha$ を例示し，$\varphi_\alpha$ が像への同相を与えることを，例えば逆写像 $\varphi_\alpha^{-1}$ を構成して，$\varphi_\alpha$ と $\varphi_\alpha^{-1}$ が共に連続であることを述べることで示す.
- 座標変換 $\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}$（$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上）を与え，$C^\infty$ 級であることを示す.

(3) 各座標近傍で $F$ を表示したものが $C^\infty$ 級写像であることを確かめる.

（正射影による局所座標系を取った場合）

例えば $U_x^\pm$ では局所座標 $(y,\, z)$ で $F$ を表すと，

$$(y,\, z) \mapsto (x,\, y) = (\pm\sqrt{1-y^2-z^2},\, y)\text{（複号同順）}$$

となる．$x \neq 0$ では $y^2+z^2<1$ であるから根号の中身は正であるので，$F|_{U_x^\pm}$ は $C^\infty$ 級写像である．$U_y^\pm$ でも同様に $(x,\, z) \mapsto (x,\, \pm\sqrt{1-y^2-z^2})$（複号同順）は $C^\infty$ 級写像である．$U_z^\pm$ では $F$ は $(x,\, y) \mapsto (x,\, y)$ と表され，恒等写像であるから $C^\infty$ 級写像である.

（立体射影による局所座標系を取った場合）

$U_0 = S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ 上で $F$ を局所座標 $(X_0, Y_0)$ で表すと (1) より $F$ は

$$(X_0,\, Y_0) \mapsto (x,\, y) = \left(\frac{2X_0}{1+X_0^2+Y_0^2},\, \frac{2Y_0}{1+X_0^2+Y_0^2}\right)$$

と表される．分母は常に正であるから $F|_{U_0}$ は $C^\infty$ 級写像である．$U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ 上でも同様である.

(4) 各座標近傍で $F$ の局所座標表示のヤコビ行列を計算し，階数が終域 $\boldsymbol{R}^2$ の次元 2 より小さくなる点（臨界点）の像の集合を求める.

ヤコビ行列は 2 次正方行列になるので，階数の条件は行列式が 0 と同値である.

答えは単位円 $\{(x,\, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$（略）.

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

幾何学 A（小林）第 8 回（6/8）部分多様体

問題　(1) 下線部を埋めてみよう．

$M$ を $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とし，$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $M$ の極大座標近傍系とする．$M$ の空でない部分集合 $L$ は，以下を満たすとき $M$ の $l$ 次元 $C^\infty$ 級**部分多様体**であるという．

$L$ の任意の点 P に対し，ある $\alpha \in A$ が存在して，

________________________________________________.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ を考え，$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1\}$ とする．$f$ の臨界値を求め，$M$ は $\boldsymbol{R}^3$ の $C^\infty$ 級部分多様体となることを示せ．

発展問題

**27.** $M_2(\boldsymbol{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,\, b,\, c,\, d \in \boldsymbol{R} \right\}$ の中で $\mathrm{tr}\, A = 1$ かつ ${}^t\!A = A$ を満たす $A$ からなる部分空間を $M$ とする．

(1) $M$ は $M_2(\boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^4$ の $C^\infty$ 級部分多様体になることを示し，$M$ の次元を求めよ．

(2) $F : M \to M_2(\boldsymbol{R})$ を $F(A) = A^2 - A$ で定める．$F$ は $C^\infty$ 級写像であることを確かめ，$F$ の臨界点集合を求めよ．

(3) $M$ の中で，$A^2 = A$ を満たす行列 $A$ 全体のなす部分集合を $P$ とする．$P$ は $M$ の $C^\infty$ 級部分多様体であることを示し，$P$ の次元を求めよ．

**28.** 陰関数定理を用いて，正則値定理を証明せよ．

**29.** $F : M^m \to N^n$ を $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像とする．点 $\mathrm{P} \in M$ における微分 $(dF)_P$ の階数を $r$ とするとき，適当な局所座標のもとで $F$ は $\mathrm{P}$ において，$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{m-r+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ と表せることを示せ．

第 7 回問題の解答

(1) $M$ の点 $P$ は，$F$ の微分 $(dF)_P : T_P(M) \to T_{F(P)}(N)$ が全射にならないとき $F$ の**臨界点**であるという．$N$ の点 $Q$ は，$F$ のある臨界点 $P$ に対しその像 $Q = F(P)$ となるとき，$F$ の**臨界値**であるという．

(2) 例えば正射影を用いる．$U_x^+ := \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$ において局所座標 $y$ を用いると，$F(x, y) = x = \sqrt{1 - y^2}$ である．このヤコビ行列は $\left( \dfrac{-y}{\sqrt{1 - y^2}} \right)$ である．臨界点は階数が 1 より小さくなる点であり，$y = 0$ すなわち $(1, 0) \in S^1$ である．

同様に $U_x^- := \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}$ 上 $y$ で表すと $F(x, y) = -\sqrt{1 - y^2}$ でヤコビ行列は $\left( \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \right)$，臨界点は $(-1, 0)$ である．

$U_y^\pm =:= \{(x, y) \in S^1 \mid \pm y > 0\}$（複号同順）では，$F$ を $x$ で表すと $F(x, y) = x$ は恒等写像であり，ヤコビ行列は $(1)$ であるから臨界点は存在しない．

以上より臨界点は $(\pm 1, 0)$．臨界値は $F(\pm 1, 0) = \pm 1$．

（別解）偏角 $\theta$ を局所座標とする座標近傍 $U_0 = \{(x, y) \in S^1 \mid x > -1\}$（$\theta \in (-\pi, \pi) = U_0'$）と $U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid x < 1\}$（$\theta \in (0, 2\pi) = U_1'$）で $S^1$ を被覆する．

$\theta \mapsto \cos\theta$ の微分は $-\sin\theta$ であるから，ヤコビ行列は $(-\sin\theta)$，臨界点は $\sin\theta = 0$ となる点である．よって $\theta = 0 \in U_0'$ と $\theta = \pi \in U_1'$ に対応する 2 点 $(\pm 1, 0)$ が臨界点．臨界値は $x$ 座標である $\pm 1$（複号同順）．

※ $S^1$ は 1 次元なので，局所座標に関する 1 変数関数として臨界点を求める．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

# 幾何学 A（小林）第 9 回（6/15）嵌込と埋込

**問題**　(1) $F : M^m \to N^n$ を $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像とする．下線部を埋めよう．

点 $P \in M$ において $F$ が**はめ込み**であるとは，$(dF)_P$ が_____ であることをいう．これはヤコビ行列 $(JF)_P$ の階数が ___ であることと同値である．このとき，$P$ と $F(P)$ のそれぞれの適切な座標近傍で $F$ は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ と表される．
$F$ がはめ込みであるとは任意の点 $P \in M$ に対しはめ込みであることをいう．

$F$ が**埋め込み**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．
(a) _____ である．　　(b) はめ込みである．
(c) $M$ と $F(M)$ の同相を与える．(像 $F(M)$ は相対位相により $N$ の部分空間とみる．)
$F$ が埋め込みのとき，像 $F(M)$ は $N$ の $C^\infty$ 級部分多様体である．

点 $P \in M$ において $F$ が**沈め込み**であるとは，$(dF)_P$ が_____ であることをいう．これはヤコビ行列 $(JF)_P$ の階数が __ であることと同値である．このとき，$P$ と $F(P)$ のそれぞれの適切な座標近傍で $F$ は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{m-n+1}, \ldots, x_m)$ と表される．
正則値の逆像は，_______ でなければ $C^\infty$ 級部分多様体になる（正則値定理）．

(2) 次の写像 $F$ ははめ込みであるか？埋め込みであるか？

$$F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2, \quad F(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$

発展問題

**30.** $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $F(u,v)=(u,uv,v^2)$ に対し次の問いに答えよ．

(1) $F$ の Jacobi 行列 $(JF)_{(u,v)}$ を計算せよ．

(2) $F$ がはめ込みとならない点 $(u,v)\in\boldsymbol{R}^2$ を求めよ．

(3) (2) で求めた点の補集合に $F$ を制限すると埋め込みであるか？
さらに $\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $f(x,y,z)=x^2z-y^2$ を考える．

(4) $f$ の臨界値 $q$ を求めよ．

(5) $f^{-1}(q)$ の概型を描き，$F$ の像と直線の和集合になることを確かめよ．（ヒント：例えば $x$ が一定の切り口を考える．$f(F(u,v))=q$ を確かめる．）

**31.** $C^\infty$ 級写像 $F:M\to N$ のグラフ $\Gamma:=\{(P,\,F(P))\in M\times N\}$ が直積 $M\times N$ の部分多様体になることを示せ．例えば次の 3 つの方法がある．

(1) $M\times N$ の座標近傍系を用いて，部分多様体の定義を満たすことを示す．

(2) 像が $\Gamma$ となる埋め込み $M\to M\times N$ を構成する．（特に，$\Gamma$ は $M$ と $C^\infty$ 級微分同相である．）

(3) 局所的に $F:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ で与えられているとして，$\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ （$(x,y)\mapsto y-F(x)$）が沈め込みになることを示す．

**32.** 3 次特殊直交群 $SO(3)$ は $M(3,\boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^9$ の部分多様体であることを示せ．

**33.** 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は $M(2,\boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{R}^8$ の部分多様体であることを示せ．（注意：複素多様体ではなく実多様体である．）

第 8 回問題の解答

(1) $M$ を $m$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とし，$\{(U_\alpha,\,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $M$ の極大座標近傍系とする．$M$ の空でない部分集合 $L$ は，以下を満たすとき $M$ の $l$ 次元 $C^\infty$ 級**部分多様体**であるという．
$L$ の任意の点 P に対し，ある $\alpha\in A$ が存在して，

$$\underline{\mathrm{P}\in U_\alpha,\,\varphi_\alpha(L\cap U_\alpha)=\{(z_1,\,\ldots,\,z_m)\in\varphi_\alpha(U_\alpha)\mid z_{l+1}=\cdots=z_m=0\}}.$$

(2) $f$ のヤコビ行列は $(2x_1\ 2x_2\ -2x_3)$ であるから，階数が 1 未満となるのは $x_1=x_2=x_3=0$ と同値．よって臨界点は原点であり，臨界値は像 $f(0,0,0)=0$ である．
$f$ は $\boldsymbol{R}^3$ 上の $C^\infty$ 級関数であり，1 は $f$ の臨界値でなく，$f^{-1}(1)$ は空でない（例えば $(1,0,0)$ を含む）．よって $f^{-1}(1)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の $C^\infty$ 級部分多様体である．

（発展問題）

**27.** (1) 写像 $G:M_2(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}^2$ を $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto(a+d,\,b-c)$ で定める．$A\in M_2(\boldsymbol{R})$ に対し，$\operatorname{tr}A=1$ かつ ${}^t\!A=A$ とは $G(A)=(1,0)$ と同値である．$G$ は成分の 1 次式で定まるから，$C^\infty$ 級写像である．$G$ のヤコビ行列は任意の $A\in M_2(\boldsymbol{R})$ で $(JG)_A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$ となり，階数 2 であるから臨界点は存在しない．よって臨界値も存在せず，$(1,0)$ は $G$ の正則値である．$G^{-1}(1,0)$ は例えば $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ を含むから空でない．よって正則値定理より $M:=G^{-1}(1,0)$ は $M_2(\boldsymbol{R})$ の $C^\infty$ 級部分多様体である．$M$ の次元は $\dim M_2(\boldsymbol{R})-\operatorname{rank}(JG)_A=4-2=2$

である．また，$(JG)_A$ の第３・４列からなる小行列は正則行列であるから，$M$ の局所座標として $(a,b)$ が取れる．
※ $a+d=1$，$b-c=0$ は連立一次方程式である．先頭の１に対応しない $(c,d)$ を局所座標としてもよい．$M$ は $\boldsymbol{R}^2$ と $C^\infty$ 級微分同相である．

(2) 局所座標 $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ に対応する $M$ の行列は $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ である．$F(A) = A^2 - A = (a^2+b^2-a)E$ となる．成分である $a^2+b^2-a$ と 0 は $a, b$ の多項式であるから，$F$ は $C^\infty$ 級写像である．$\dim M < \dim M_2(\boldsymbol{R})$ であるから，$M$ のすべての点が臨界点である．

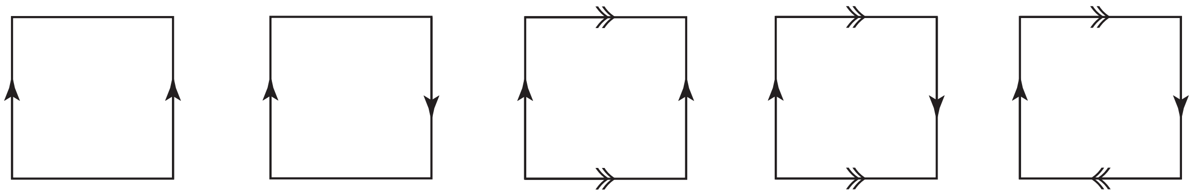
(3) $A^2 = A$ となるのは $a^2+b^2-a=0$ のときなので，$f : M \to \boldsymbol{R}$ を $f(a,b) = a^2+b^2-a$ で定める．$f$ は $M$ 上の $C^\infty$ 級関数であり，ヤコビ行列は $\operatorname{grad} f = (2a-1,\ 2b)$．臨界点は $\operatorname{grad} f$ が零ベクトルとなる条件から $a = \frac{1}{2}$ かつ $b=0$ のときで，臨界値は $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ である．0 は $f$ の臨界値でなく，$P = f^{-1}(0)$ は $(0,0)$ を含むので空でないから，$P$ は $M$ の $C^\infty$ 級部分多様体である．次元は $\dim M - \operatorname{rank} \operatorname{grad} f = 2-1 = 1$．
※ (2) より $P = F^{-1}(O)$ として $P$ が部分多様体であることを示すのは無理がある．$P$ は，$M \cong \boldsymbol{R}^2$ 内で $(a-\frac{1}{2})^2 + b^2 = \frac{1}{4}$ で定まる図形であるから，$S^1$ と $C^\infty$ 級微分同相である．

※ $P$ の元は $\boldsymbol{R}^2$ から１次元部分空間への直交射影を与える行列である（なぜか？）．一般化することで射影空間の一つの構成方法が与えられる．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

## 幾何学 A（小林）第 10 回（6/22）射影空間

**問題**　(1) 正方形の辺を対応する矢印を合わせるように貼り合わせてできる多様体を考える．ただし境界点においては矢印の両側を合わせて座標近傍を作る．例えば図において左の 2 つは左右の辺を貼り合わせたとき，円環（円筒）とメビウスの帯に可微分同相になる．残り 3 つに対し,（自分なりの）絵を描いてみよ．



円環　　メビウスの帯

(2) $F(X_1 : X_2) = (X_1 : X_2 : 0)$ により写像 $F : \boldsymbol{R}P^1 \to \boldsymbol{R}P^2$ が定まることを示せ（$\lambda \in \boldsymbol{R}^\times$ に対し，$F(\lambda X_1 : \lambda X_2) = F(X_1 : X_2)$ を確かめよ）．

　$F$ の適切な局所座標表示を与えることで，$F$ は $C^\infty$ 級埋込であることを示せ．

発展問題

**34.** 第１０回問題 (1) の図で，右３つを，左下隅から時計回りに一周する順に，矢印を $a$，二重矢印を $b$，逆向きは逆元として，$aba^{-1}b^{-1}$，$abab^{-1}$，$abab$ と表すことにする．正６角形の３つの対辺を $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ と同一視した曲面はどのような形か？正８角形の辺を $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ と同一視した曲面はどのような形か？

**35.** $d$ を正整数とする．$\boldsymbol{P}^1$ から $\boldsymbol{P}^1$ への写像を同次座標で次のように与えたい．

$$F : (X_0 : X_1) \mapsto (X_0^d : X_0^{d-1}X_1 : \cdots : X_1^d)$$

(1) $F$ は可微分写像であることを確かめよ．

(2) $F$ は埋め込みであることを示せ．($d$ **重埋め込み**という．)

(3) $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への $(u,\, v) \mapsto (u^2,\, uv,\, v^2)$ は埋め込みではない．何が違う？

**36.** 実射影空間について，次の構成法から整理してみよう．

(1) $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点を通る直線全体．方向ベクトルで表すことで，$\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ の商空間になる．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の座標を「同次座標」と呼ぶ．球面を二重被覆にもつ．

(2) $n+1$ 枚のアフィン近傍 $U_i = \boldsymbol{R}^n$ の貼り合わせ $\bigcup_{i=0}^n U_i$．$\boldsymbol{R}^n$ に無限遠超平面を付け加えたコンパクト化になる．座標を「非同次座標」と呼ぶ．

(3)* 階数１の $n+1$ 次実対称べき等行列の全体．原点を通る直線への直交射影を表す実 $(n+1)$ 次行列 $A$ は，${}^t\!A = A$，$A^2 = A$，$\operatorname{tr} A = 1$ を満たす．

**37.** $\boldsymbol{R}P^2$ の同次座標を $(X : Y : Z)$ とする．

(1) $\boldsymbol{R}P^2$ の中で $Y^2Z = 4X^3 - 4XZ^2$ を満たす点の集合 $C$ は適切に定まり，$\boldsymbol{R}P^2$ の部分多様体になることを示せ．

(2) $f(X : Y : Z) = (X : Z)$ は $C^\infty$ 写像 $f : C \to \boldsymbol{R}P^1$ を定めることを示し，$f$ の臨界値を求めよ．

（レポート推奨問題）

**38.** $S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ で原点を中心とする単位超球面を表す．$S^3, S^2$ の座標近傍を $1 \le i \le 4$，$1 \le j \le 3$ に対し

$$U_i^\pm = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid \pm x_i > 0\},\ V_j^\pm = \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 \mid \pm y_j > 0\}$$

（複号同順）で定め，局所座標を正射影で入れる．写像 $S^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \\ &(y_1, y_2, y_3) = (2(x_1x_3 + x_2x_4),\ 2(x_1x_4 - x_2x_3),\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\end{aligned}$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) $S^3$ の点の像が $S^2$ に属することを確かめよ．

上の写像を改めて $F : S^3 \to S^2$ と書く．$F$ は **Hopf 写像**と呼ばれる．

(2) 座標関数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ はいずれも $S^3 \to \boldsymbol{R}$ という $C^\infty$ 級関数を定める．これを $P \in U_3^+$，$P \in U_3^-$ のときに示せ．

(3) $P \in U_3^+ \cap F^{-1}(V_1^+)$ に対し，$P$ のまわりで $F$ を局所座標で表せ（$y_2, y_3$ を $x_1, x_2, x_4$ で表せ）．

(4) $U_i^\pm \cap F^{-1}(V_j^\pm)$（複号任意）は開集合であり，$S^3$ はこれら 48 枚の開集合で覆われることを示せ．

(5) $F$ は $C^\infty$ 級写像であることを (3) の $P$ の周りで示せ．

(6) (3) の $P$ に対し，ヤコビ行列 $(JF)_P$ を計算せよ．
（ヒント：まず $\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\dfrac{x_1}{x_3}$ 等を示す）

(7) (3) の $P$ に対し，$(dF)_P$ は全射であることを示せ．
（ヒント：$\mathrm{rank}(JF)_P \le 1$ とすると $y_1 = 0$ となる）

(8) $a, b, \theta$ を $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実定数とする．$c : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^4$ を，

$$t \mapsto (a\cos(t-\theta),\ a\sin(t-\theta),\ b\cos t,\ b\sin t)$$

で定める．$c$ の像は $S^3$ に含まれることを示し，$c$ は $S^3$ 内の $C^\infty$ 級曲線であることを示せ．

(9) $b > 0$，$P = c(0)$ とする．$t$ が 0 に十分近いとき $c(t) \in U_3^+$ である．
$\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_P,\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_P,\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)_P$ で表せ．

(10) $F(c(t))$ および $(dF)_P\left(\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}\right)$ を計算せよ．

(11) $F^{-1}(0,0,1)$ は $S^1$ と同相であることを示せ．

(12) $F$ は全射であることを示せ．

第９回問題の解答

(1) $F : M^m \to N^n$ を $C^\infty$ 級多様体の間の $C^\infty$ 級写像とする．

点 $P \in M$ において $F$ が**はめ込み**であるとは，$(dF)_P$ が 単射 であることをいう．これはヤコビ行列 $(JF)_P$ の階数が $m$ であることと同値である．このとき，$P$ と $F(P)$ のそれぞれの適切な座標近傍で $F$ は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ と表される．

$F$ がはめ込みであるとは任意の点 $P \in M$ に対しはめ込みであることをいう．

$F$ が**埋め込み**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

(a) 単射 である．　(b) はめ込みである．

(c) $M$ と $F(M)$ の同相を与える．（像 $F(M)$ は相対位相により $N$ の部分空間とみる．）

$F$ が埋め込みのとき，像 $F(M)$ は $N$ の $C^\infty$ 級部分多様体である．

点 $P \in M$ において $F$ が**沈め込み**であるとは，$(dF)_P$ が 全射 であることをいう．これはヤコビ行列 $(JF)_P$ の階数が $n$ であることと同値である．このとき，$P$ と $F(P)$ のそれぞれの適切な座標近傍で $F$ は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{m-n+1}, \ldots, x_m)$ と表される．

正則値の逆像は， 空集合 でなければ $C^\infty$ 級部分多様体になる（正則値定理）．

(2) $F$ は多項式で表されているので，$C^\infty$ 級写像である．

ヤコビ行列 $(JF)_t = (2t,\, 3t^2 - 1)$ は決して零ベクトルにならないので，はめ込みである．

$F(-1) = F(1) = (0, 0)$ なので $F$ は単射でない．よって埋め込みではない．

（発展問題）

**30.** (1) $(JF)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$.

(2) $dF$ が単射でないのは，ヤコビ行列の階数が 2 未満となるときであり，$(u, v) = (0, 0)$ のときである．

(3) $v \neq 0$ のとき $F(0, v) = F(0, -v) = (0, 0, v^2)$ となるので $F$ は単射でない．よって埋め込みでない．

(4) 臨界点は $\operatorname{grad} f = (2xz,\, -2y,\, x^2)$ が零ベクトルとなるとき，すなわち $x = y = 0$ のときである．よって $q = f(0, 0, z) = 0$.

(5) The Whitney umbrella で検索してみてください．

学修番号　　　　　　　　　　　氏名

**幾何学 A（小林）第 11 回（6/29）１の分割**

**問題**　(1) 今回の講義で出てきた定義を書きだしてみよう．

(2) 1 の分割について，主張と意義を考えてみよう．

発展問題

**39.** テキスト章末問題 14.1, 14.4 を解け．

**40.** $\sigma$ コンパクトな位相空間は，パラコンパクトであることを示せ．

第１０回問題の解答

(1) 順に，トーラス，クラインの壺，実射影平面．

(2) $\lambda \in \boldsymbol{R}^{\times}$ に対し $F(\lambda X_1 : \lambda X_2) = (\lambda X_1 : \lambda X_2 : 0) = (X_1 : X_2 : 0) = F(X_1 : X_2)$ であるから，$F$ は適切に定まる．

$U_i$ で $X_i \neq 0$ となる座標近傍を表す．$P \in \boldsymbol{R}P^1$ が $U_i$ に属するとき，$F(P)$ も $\boldsymbol{R}P^2$ の $U_i$ に属する．$U_1$ で $F$ を座標表示すると，$x = X_2/X_1$，$y = X_3/X_1$ として $x \mapsto (x, 0)$ と表される．$U_2$ でも $x = X_1/X_2$，$y = X_3/X_2$ に対し $x \mapsto (x, 0)$ と表される．

よって $F$ は単射はめ込みである．また像 $F(\boldsymbol{R}P^1)$ は $U_i$ との交わりが $y = 0$ となる部分に一致するので $\boldsymbol{R}P^2$ の部分多様体である．これより $F$ は $C^\infty$ 級埋込であることが従う．実際,（例えば部分多様体であることを用いると）像から $\boldsymbol{R}P^1$ への逆写像は，各 $U_i \cap F(\boldsymbol{R}P^1)$（$i = 1, 2$）上で $x \mapsto x$ で表される（$\boldsymbol{R}P^2$ の $U_i$ で $(x, 0)$ で表される点は像の対応する座標では $x$ で表されることに注意する．像は $U_1 \cup U_2$ に含まれる）から，連続である．

（発展問題）

**34.** 順に，トーラス，穴が２つ空いた浮輪．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

**幾何学 A（小林）第 12 回（7/13）ベクトル場**

**問題**　次の $xy$ 平面上のベクトル場 $X$ を図示せよ．

(1) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$,　　(2) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$,　　(3) $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$

発展問題

**41．** $\boldsymbol{R}$ の座標を $x$ とし，$\boldsymbol{R}$ 上の $C^\infty$ 級ベクトル場 $X_k := x^k \dfrac{d}{dx}$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）を定める．$k, l, m$ を非負整数とするとき，

$$[[X_k, X_l], X_m] + [X_l, [X_k, X_m]]$$

を計算せよ．

**42．** $\alpha \in \boldsymbol{R}$ として，$i : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \alpha\theta, \rho \sin \alpha\theta, \theta)$ で定める．

(1) $i$ は $C^\infty$ 級埋め込みであることを示せ．以下，像 $M$ の局所座標として $(\rho, \theta)$ を用いる．

(2) $\alpha = 0$ のとき $i$ の像を求めよ．

以下では $\alpha \neq 0$ とする．$i$ の像を**ヘリコイド** (helicoid) という．

(3) $\pi : M \to \boldsymbol{R}^2$ を $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ とする．$\pi$ は全射であることを示し，$\pi$ の臨界点集合・臨界値集合を求めよ．

(4) $P_0(1, 0, 0) \in M$ とし，$S^1 \subset \boldsymbol{R}^2$ 上を点 $Q(\cos t, \sin t)$（$t \in \boldsymbol{R}$）が動いている．$M$ 上の $C^\infty$ 級曲線 $c : \boldsymbol{R} \to M$ で，$c(0) = P_0$，$\pi(c(t)) = Q$ となるものを求めよ．

(5) (4) で求めた $c$ の $P_0$ における速度ベクトルを求めよ．また，その $\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)_{P_0}$ 成分の符号を答えよ．

(6) $t \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\varphi_t : (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + t)$ は $M$ の $C^\infty$ 級自己微分同相写像であることを示せ．

(7) $P \in M$ に対し $X_P = \dfrac{d\varphi_t}{dt}(P)\Big|_{t=0}$ を求めよ．

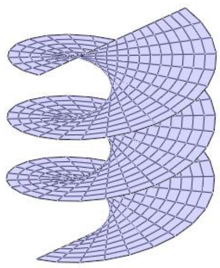


図 1: helicoid

**43．** 次を示せ．

(1) $F : M \to N$ を $C^\infty$ 級多様体の間の連続写像とする．$F$ が $C^\infty$ 級写像であるのは，任意の $C^\infty$ 級関数 $f : V \to \boldsymbol{R}$（$V$ は $N$ のある開集合）に対し，$f \circ F : F^{-1}(V) \to \boldsymbol{R}$ が $C^\infty$ 級関数になることと同値である．（ヒント：$f$ として局所座標の１つを考えよ．）

(2) (1) の仮定に加えて $N$ は $\sigma$ コンパクトであるとする．$F$ が $C^\infty$ 級写像であるのは，$N$ 上の任意の $C^\infty$ 級関数 $f : N \to \boldsymbol{R}$ に対し，$f \circ F : M \to \boldsymbol{R}$ が $M$ 上の $C^\infty$ 級関数になることと同値である．

**第１１回問題の解答**：皆さんで考えてみてください．

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

**幾何学 A（小林）第 13 回（7/20）積分曲線**

問題　次の $xy$ 平面上のベクトル場 $X$ に対し，時刻 $0$ に点 $(1,1)$ を通る積分曲線を求めよ．
(1) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$,　　(2) $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$,　　(3) $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

第１２回問題の解答

お互いにチェックしてみてください．

（発展問題）

**41.** まず $[X_k, X_l]$ を計算する．積の微分を用いると，

$\left[x^k \dfrac{d}{dx}, x^l \dfrac{d}{dx}\right] f = x^k \dfrac{d}{dx}(x^l \dfrac{df}{dx}) - x^l \dfrac{d}{dx}(x^k \dfrac{df}{dx})$

$= x^{k+l} \dfrac{d^2 f}{dx^2} + x^k (l x^{l-1}) \dfrac{df}{dx} - x^{l+k} \dfrac{d^2 f}{dx^2} - x^l (k x^{k-1}) \dfrac{df}{dx}$

$= (l-k) x^{k+l-1} \dfrac{df}{dx}.$

よって $[X_k, X_l] = (l-k) X_{k+l-1}$ である．

Jacobi 律より与式は $[X_k, [X_l, X_m]]$ に等しく，これは

$$(m-l-k) x^{k+l+m-2} \frac{d}{dx} = (m-l-k) X_{k+l+m-2}$$

に等しい．

第１３回問題の解答

$c(t) = (x(t), y(t))$ とすると，$c(0) = (1,1)$，$v_c = x'(t) \frac{d}{dx} + y'(t) \frac{d}{dt}$ である．

(1) $x'(t) = x(t)$，$y'(t) = 2y(t)$ より $x(t) = e^t$，$y(t) = e^{2t}$．よって $(x(t), y(t)) = (e^t, e^{2t})$．

※初期値が $(x_0, y_0)$ ならば放物線 $y = ax^2$（$a = y_0/x_0^2$）．$x_0 = 0$ のとき $x(t) \equiv 0$，$y(t)$ は正・負・0 に応じて $y$ 軸の対応する部分．

(2) $x'(t) = y(t)$，$y'(t) = x(t)$ を解くと，

$$(x(t), y(t)) = C_1 e^t (1,1) + C_2 e^{-t} (1,-1).$$

$(x(0), y(0)) = (1,1)$ より $C_1 = 1$，$C_2 = 0$ となるので，

$$(x(t), y(t)) = e^t (1,1).$$

※本問の初期値では半直線 $y = x$（$x > 0$）．一般には直角双曲線など．

(3) $x'(t) = -y(t)$，$y'(t) = x(t)$ より，$x''(t) = -x(t)$ である．よって，

$$x(t) = A\cos t + B\sin t, \quad y(t) = -x'(t) = A\sin t - B\cos t \qquad (A, B \in \boldsymbol{R})$$

とおける．$(x(0), y(0)) = (1,1)$ より $A = 1$，$B = -1$ であるから，$x(t) = \cos t - \sin t = \cos(t + \frac{\pi}{4})$，$y(t) = \cos t + \sin t = \sin(t + \frac{\pi}{4})$．

※原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周．