線形代数 IIb 期末試験　　小林

13:00 – 14:30，February 10, 2017

1.　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.（60 点）

（1）A の固有値と，対応する一般固有空間の次元をそれぞれ求めよ.

（2）A の最小多項式を求めよ.

（3）A のジョルダン標準形 J と，$J = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を一組求めよ.

（4）e^{tA} を計算せよ.

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，第 3 行を①，②，③で表す.

（1）まず A の固有多項式を求める.

$|xE - A| = \begin{vmatrix} x+4 & -1 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 5 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & -1 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 \\ -x+4 & -x^2-2x-3 & 0 \end{vmatrix}$ ③ $-(x+1)\times$ ①

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$. よって固有値は -2（重複度 3）.

固有値 -2 の重複度が 3 であるから，一般固有空間 W_{-2} の次元は 3.

（2）A の最小多項式 $m_A(x)$ を求める. $(x+2) \mid m_A(x) \mid \varphi_A(x)$ である.

$A + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \neq O$，$(A+2E)^2 = O$ であるから，$m_A(x) = (x+2)^2$.

（3）（2）よりジョルダン細胞の大きさの最大は 2 である.（あるいは $\mathrm{rank}(A+2E) = 1$ であるから固有空間の次元は 2 であり，ジョルダン細胞の個数は 2 である.）

よって $J = J(-2,1) \oplus J(-2,2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$（直和の順序は問わない）に取れる.

行基本変形により $A + 2E \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるから，固有空間 V_{-2} の基底として ${}^t[1\ 0\ 1]$，${}^t[0\ 3\ 1]$ が取れる.

$P = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$ とおくと $AP = PJ$ は次のように書き直せる.

$$A\boldsymbol{v}_1 = -2\boldsymbol{v}_1, \quad A\boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{v}_2, \quad A\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$$

$\boldsymbol{v}_3$ として $\boldsymbol{v}_2 := (A+2E)\boldsymbol{v}_3$ が $\boldsymbol{0}$ とならないベクトルをとる. 例えば $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_3$ とすればよい. このとき $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有ベクトルである. $\boldsymbol{v}_2$ と平行でない固有ベクトルとして例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ をとる. これらを並べて $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば，$\det P = 1 \neq 0$ より P は正則であり，$P^{-1}AP = J$ を満たす.

（4）$N = A + 2E$ とおく. $N^2 = O$ であるから $e^{tN} = E + tN$ である. $-2tE$ と tN は可換であるから，

$e^{tA} = e^{-2tE+tN} = e^{-2tE}e^{tN} = e^{-2t}E(E+tN) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+2t & 6t & -2t \\ -t & 1-3t & t \\ -t & -3t & 1+t \end{bmatrix}$.

2. 3 変数実 2 次形式 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ について次の問いに答えよ.（40 点）

（1）f を実対称行列 A とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を用いて $f = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と表すとき，A の固有値を求めよ.

（2）直交行列 P で，${}^tPAP$ が対角行列になるものを一つ求めよ.

（3）f は正定値であるかどうか判定せよ.

解答例

（1）$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ である．A の固有多項式を計算する.

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -x+\frac{3}{2} & x-\frac{3}{2} & 0 \\ -x+\frac{3}{2} & 0 & x-\frac{3}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ ②-① \\ ③-① \end{matrix}$$

$$= (x-\tfrac{3}{2})^2 \begin{vmatrix} x-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-\tfrac{3}{2})^2 \begin{vmatrix} x-1 & x-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{（第 2 列に第 1 列を足した）}$$

$= (x-\frac{3}{2})^2 x$．以上より固有値は $\frac{3}{2}$（重複度 2），0（重複度 1）.

（2）固有値 $\frac{3}{2}$ に対する固有空間 $V_{\frac{3}{2}}$ を求める．行基本変形により

$A - \frac{3}{2}E = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，$V_{\frac{3}{2}} = \left\langle \boldsymbol{a}_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

グラム・シュミットの直交化を施す．まず直交化する.

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

正規化して $\widetilde{\boldsymbol{b}}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\widetilde{\boldsymbol{b}}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が $V_{\frac{3}{2}}$ の正規直交基底をなす.

固有値 0 に対する固有空間 V_0 を求める.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②+\frac{1}{2}\times① \\ ③+\frac{1}{2}\times① \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①+\frac{2}{3}\times② \\ \frac{4}{3}\times② \\ ③+② \end{matrix}$$

よって $V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$．正規化して，基底として $\widetilde{\boldsymbol{b}}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる．これは $\widetilde{\boldsymbol{b}}_1, \widetilde{\boldsymbol{b}}_2$ と直交する.

$P = [\widetilde{\boldsymbol{b}}_1,\ \widetilde{\boldsymbol{b}}_2,\ \widetilde{\boldsymbol{b}}_3] = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ とすると，P は正規直交基底を並べた行列であるから直交行列である．${}^tP = P^{-1}$ より ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は対角行列である.

（3）固有値として正でない 0 があるから，正定値でない.