線型代数 Ia （第１３回）

学修番号 氏名

（1）行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ に対し，$\tilde{A}$ と A^{-1} を求めよ．

（2）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ とする．$A = [\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ の余因子行列は ${}^t[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$ で与えられることを確かめよ．

解答例

（1）定義より，

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

これらを転置して並べて，$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 7 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

$|A| = 15$ となるから，$A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 7 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

（2）成分計算による.（略）

線型代数 Ia （第１２回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 & -5 \\ 3 & 4 & 11 & -2 \\ -5 & 9 & -10 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

（２*） $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1+xy & x+xy & y+xy \\ (1+xy)^2 & x(1+y)^2 & y(1+x)^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

解答例

（１） $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 & -5 \\ 3 & 4 & 11 & -2 \\ -5 & 9 & -10 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} ① - 4 \times ④ \\ ② - 3 \times ④ \\ ③ + 5 \times ④ \\ \ \end{matrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= -(-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -5(-12-12) = 120.$

（２） $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1+xy & x(1+y) & y(1+x) \\ (1+xy)^2 & x(1+y)^2 & y(1+x)^2 \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+xy & 1+y & 1+x \\ (1+xy)^2 & (1+y)^2 & (1+x)^2 \end{vmatrix}$

ヴァンデルモンドの行列式を用いて,

$= xy(y-xy)(x-xy)(x-y) = x^2y^2(1-x)(1-y)(x-y) = x^2y^2(x-y)(x-1)(y-1).$

線型代数 Ia （第１１回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）A を n 次実交代行列とする．n が奇数のとき，$\det A = 0$ であることを示せ．

（２*）a, b, c, d, e, f を実数とするとき，$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

解答例

（１）${}^t\!A = -A$ の両辺の行列式を取ると，$|A| = (-1)^n |A|$．n は奇数だから $2|A| = 0$．よって $|A| = 0$.

（２）$a \neq 0$ とすると，

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -d/a & -e/a \\ 0 & a & b & c \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} ② \\ ① \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & -d/a & -e/a \\ 0 & a & b & c \\ 0 & -d & -bd/a & f - be/a \\ 0 & -e & -f - cd/a & -ce/a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ③ + b \times ① \\ ④ + c \times ① \end{matrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -d/a & -e/a \\ 0 & 1 & b/a & c/a \\ 0 & -d & -bd/a & f - be/a \\ 0 & -e & -f - cd/a & -ce/a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ ②/a \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -d/a & -e/a \\ 0 & 1 & b/a & c/a \\ 0 & 0 & 0 & f - be/a + cd/a \\ 0 & 0 & -f - cd/a + be/a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ③ + d \times ② \\ ④ + e \times ② \end{matrix}$$

$$= -a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -d/a & -e/a \\ 0 & 1 & b/a & c/a \\ 0 & 0 & -f - cd/a + be/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f - be/a + cd/a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ④ \\ ③ \end{matrix}$$

$$= -a^2(-f - cd/a + be/a)(f - be/a + cd/a) = (af - be + cd)^2.$$

両辺は a, b, c, d, e, f の多項式なので特に連続であり，$a \to 0$ の極限でも等号が成り立つ．よって $a = 0$ のときも含めて行列式の値は $(af - be + cd)^2$ に等しい．

線型代数 Ia （第１０回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）次の行列式を計算せよ. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

※行列式は，両側を（括弧でなく）縦棒で挟み，基本変形は（矢印でなく）等号でつなぐ.

（２*）演算に対し，a の行と b の列が交わる成分に ab を書いたものを乗積表という．２文字の置換全体の乗積表は $\begin{array}{c|cc} & e & (1\ 2) \\ \hline e & e & (1\ 2) \\ (1\ 2) & (1\ 2) & e \end{array}$ である．３文字の置換全体の乗積表を書け.

解答例

直前の第１行，第２行，$\cdots$ を，①，②，$\cdots$ で表すことにする.

（１）行基本変形により上三角行列にする．第２行から２をくくり出す.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ ②-① \\ ③+2\times① \\ ④-2\times① \end{matrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ③-3\times② \\ ④+② \end{matrix} \quad (*)$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ③+3\times④ \\ \\ \end{matrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ ④-3\times③ \end{matrix} = 2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot(-3) = -6.$$

(*) から別解：第４行から３をくくり出し，行の取替えで (-1) 倍.

$$= 2\cdot3\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ④/3 \\ ③ \end{matrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ ④+8\times③ \end{matrix} = -6\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = -6.$$

（２）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を $(1\ 2\ 3)$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を $(1\ 3\ 2)$ と表す.

	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
e	e	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	e
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	e	$(1\ 2\ 3)$

線型代数 Ia （第９回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）次の行列 A の逆行列を求めよ．$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

（２*）$\boldsymbol{R}^3$ で連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（$A$ は実 2×3 行列，$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$，$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$）を考える．解 $\boldsymbol{x}$ の集合が直線となるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = 2$ であることを示せ．

また，このとき A のある 2 列を選んで並べた行列が正則になることを示せ．

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，$\cdots$ を，①，②，$\cdots$ で表すことにする．

（１）$[A|E]$ に行基本変形を施す．

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{②} - \text{①} \\ \text{③} + 2 \times \text{①} \\ \text{④} - 2 \times \text{①} \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 3 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{①} - \text{②} \\ \\ \text{③} - 3 \times \text{②} \\ \text{④} + \text{②} \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{③} + 3 \times \text{④} \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{①} + 3 \times \text{③} \\ \text{②} - 2 \times \text{③} \\ \\ \text{④} - 3 \times \text{③} \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{①} + \text{④} \\ \\ \\ -\text{④} \end{array}$$

これは $[E|A^{-1}]$ に等しいから，$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \\ -9 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

（２）直線となるのは一般解がパラメータを 1 個含む場合であり，$\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A = 3 - 1 = 2$ が必要．逆に $\operatorname{rank} A = 2$ と仮定すると，拡大係数行列の行数は 2 なので $2 \geq \operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] \geq \operatorname{rank} A = 2$．よって $\operatorname{rank}[A\ \boldsymbol{b}] = \operatorname{rank} A$ は自動的に成り立つから解は存在する．

$\operatorname{rank} A = 2$ であるから，行基本変形の繰り返しで階段行列にしたとき，先頭の 1 が 2 箇所存在する．すなわち，ある正則行列 P が存在して PA のある 2 列は 2 次単位行列になる．よってその 2 列を並べた行列は P^{-1} に等しく，これは正則行列である．

※第８回は中間試験.

線型代数 Ia （第７回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）次の方程式を解け．

$$\begin{cases} 5x_1-4x_2+\ \ x_3+x_4 &= 0\\ 3x_1-2x_2-\ \ x_3+x_4 &= 0\\ -2x_1+\ \ x_2+2x_3-x_4 &= 0\end{cases}$$

（２）漸化式 $x_{k+1}-2x_k=-k^2$（$k=1,2,3,\ldots$），初期条件 $x_1=3$ を満たす数列 $\{x_k\}$ を考える．
$x_k=ak^2+bk+c$（a,b,c はスカラー）の形の特殊解を求めよ．

（３）（２）の漸化式の一般項を求めよ．

解答例

直前の第１行，第２行，$\cdots$ を，①，②，$\cdots$ で表すことにする．

（１）同次連立一次方程式なので係数行列に行基本変形を施すと，

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \begin{matrix} ①+2\times③\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & -16 & 4\\ 0 & -3 & 12 & -3\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②-3\times①\\ ③+2\times①\end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & -3 & 12 & -3\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②/4\\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{matrix} ①+2\times②\\ \\ ③+3\times②\end{matrix}.$$

先頭の１に対応する x_1,x_2 を残りの x_3,x_4 で表すと，$x_1=3x_3-x_4$，$x_2=4x_3-x_4$．これより解は

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad (x_3, x_4 \text{ は任意のスカラー}).$$

（２）$a(k+1)^2+b(k+1)+c-2(ak^2+bk+c)=-k^2$ を整理して，$(1-a)k^2+(2a-b)k+(a+b-c)=0$．これが $k=1,2,\ldots$ に対し恒等的に成り立つから，$a=1,b=2,c=3$．よって $x_k=k^2+2k+3$．

（３）同伴な同次連立一次方程式は，$x'_{k+1}-2x'_k=0$．これは公比２の等比数列を表すから，$x'_k=2^{k-1}x'_1$．よって元の漸化式の一般解は，$x_k=2^{k-1}x'_1+k^2+2k+3$．$x_1=3$ より $x'_1=-3$．よって $x_k=-3\cdot 2^{k-1}+k^2+2k+3$．

線型代数 Ia （第６回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　氏名

（1） $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ を行基本変形で階段行列にし，階数を求めよ．

（2） $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -1 \\ 2x_1 + \ x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= -4 \end{cases}$ を解け．(前問を用いよ)

（3） $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + \ x_3 &= -1 \\ -4x_1 + 4x_2 - \ x_3 &= c \end{cases}$ が解をもつための定数 c の条件を求め，そのときの解を求めよ．

※特に断っていなくても，掃き出し法を用いるときは，用いた基本変形を明記すること．

※計算ミスをなくすため，解を求めたあと検算しましょう（元の方程式に代入して解であることを確認）．

※行列の基本変形には，$=$ ではなく $\longrightarrow$ などを使う．

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，$\cdots$ を，①，②，$\cdots$ で表すことにする．

（1）行基本変形を施すと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ② - 2 \times ① \\ ③ + ① \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②/(-3) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① - 2 \times ② \\ \\ ③ - 5 \times ② \end{matrix} .$$

階数は階段行列の先頭の 1 の個数であるから，$\operatorname{rank} A = 2$.

（2）拡大係数行列は前問の行列 A であるから，行基本変形後の階段行列に対応する方程式

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 &= 1 \\ \qquad x_2 + \ x_3 &= -1 \end{cases}$$

を解けばよい．先頭の 1 のある列に対応する未知数 x_1, x_2 を，残った x_3 で表すと

$$x_1 = 3x_3 + 1, \quad x_2 = -x_3 - 1$$

となるから，解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 + 1 \\ -x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x_3 \text{ は任意のスカラー}).$$

（3）拡大係数行列に行基本変形を施すと，

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & c \end{bmatrix} \begin{matrix} ① - ② \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & c+4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ② - 2 \times ① \\ ③ + 4 \times ① \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & c+4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②/(-1) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c-5 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① - ② \\ \\ ③ - 3 \times ② \end{matrix} .$$

解が存在する必要十分条件は，拡大係数行列の階数と係数行列の階数とが等しくなることであるから，$c - 5 = 0$．これを解いて，$c = 5$．このとき先頭の 1 に対応する x_1，x_3 を残った x_2 で表すと，$x_1 = x_2 - 2$, $x_3 = 3$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 2 \\ x_2 \\ 3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (x_2 \text{ は任意のスカラー}).$$

線型代数 Ia （第５回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ とする．

（１）P は直交行列であることを確かめよ．

（２）$B = P^{-1}AP$ を計算せよ．

（３）B^{-1} を求めよ．さらに A^{-1} を求めよ．

（４*）正則行列 A と正の整数 k に対し，$A^0 := E$，$A^{-k} := (A^{-1})^k$ と定める．
A^k は正則であり，$(A^k)^{-1} = A^{-k}$ が成り立つことを示せ.（つまり，$A^kA^{-k} = A^{-k}A^k = E$ を示せ.）
$(A^{-1})^{-k} = A^k$ を示せ．また，k, l を正の整数とするとき $(A^{-k})^{-l} = A^{kl}$ を示せ.

解答例

（１）${}^tP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ であるから，

$$ {}^tPP = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = E. $$

同様に，$P\,{}^tP = E$ も確かめられるから，P は直交行列である.

（２）（１）より $P^{-1} = {}^tP$ であるから，

$$ \begin{aligned} B = {}^tPAP &= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} -18 & -18 & 9 \\ -9 & 18 & 18 \\ -18 & 9 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} $$

（３）B は対角行列であるから，逆行列は対角成分の逆数を並べた対角行列になる.

$$ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{bmatrix} = B. $$

$A = PBP^{-1}$ であるから，$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1} = PBP^{-1} = A$.

（４）$k = 1$ のときは明らか．k で成り立つと仮定する．$A^{-k-1} = (A^{-1})^{k+1} = (A^{-1})^kA^{-1}$ に注意すると，$A^{k+1}A^{-k-1} = AA^kA^{-k}A^{-1} = E$，$A^{-k-1}A^{k+1} = A^{-1}A^{-k}A^kA = E$ となり，$k+1$ のときも成り立つ．よって数学的帰納法によりすべての正整数 k に対し A^k は正則であり，$(A^k)^{-1} = A^{-k}$．$(*)$

また，A が正則ならば A^{-1} も正則であり，$(A^{-1})^{-k} = ((A^{-1})^{-1})^k = A^k$．$(**)$

さらに A^{-k} も正則であるから，$(A^{-k})^{-l}$ も定義される．定義から $(A^{-k})^{-l} = (((A^{-1})^k)^{-1})^l$ であるが，$(*)$ よりこれは $((A^{-1})^{-k})^l$ に等しい．さらに $(**)$ を用いると $(A^k)^l = A^{kl}$ に等しい.

※（４）の A は（１）～（３）とは異なり，一般の正則行列です.（失礼しました）

線型代数 Ia （第４回補足*）

次の定理より，多項式の演算（加法，スカラー倍，乗法）は,「x に A を代入する」操作と可換である．

定理　$f(x), g(x)$ を多項式, λ をスカラーとする．$h_1(x) := f(x)+g(x)$，$h_2(x) := \lambda f(x)$，$h_3(x) := f(x)g(x)$ とおくと，$h_1(A) = f(A) + g(A)$，$h_2(A) = \lambda f(A)$，$h_3(A) = f(A)g(A)$.

証明

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

とおく．行列の多項式の定義から

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k, \quad g(A) = \sum_{k=0}^{n} b_k A^k$$

である．

まず $h_1(A) = f(A) + g(A)$ を示す．式でも行列でも加法は可換であるから，$m \le n$ としても一般性を失わない．$m < k \le n$ のとき $a_k := 0$ と定める．行列の加法の交換則と，加法とスカラー倍の分配則から

$$f(A) + g(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k + \sum_{k=0}^{n} b_k A^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k A^k + b_k A^k) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) A^k$$

となる．また

$$h_1(x) = f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

であるから，行列の多項式の定義より

$$h_1(A) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) A^k.$$

よって $h_1(A) = f(A) + g(A)$ が言えた.

$$\lambda f(A) = \lambda \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = \sum_{k=0}^{m} \lambda (a_k A^k) = \sum_{k=0}^{m} (\lambda a_k) A^k.$$

である．一方，多項式でも同様に

$$h_2(x) = \lambda f(x) = \lambda \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} \lambda (a_k x^k) = \sum_{k=0}^{m} (\lambda a_k) x^k$$

であるから，

$$h_2(A) = \sum_{k=0}^{m} (\lambda a_k) A^k.$$

よって $h_2(A) = \lambda f(A)$ も言えた.

和と積の分配則より

$$f(A)g(A) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k A^k \right) \left(\sum_{l=0}^{n} b_l A^l \right) = \sum_{k=0}^{m} \left((a_k A^k) \sum_{l=0}^{n} b_l A^l \right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{n} (a_k A^k)(b_l A^l) \right)$$

積とスカラー倍の可換性を用いると $(a_k A^k)(b_l A^l) = a_k(A^k(b_l A^l)) = a_k(b_l(A^k A^l)) = (a_k b_l) A^{k+l}$ である．加法の交換則より $p := k + l$ に関する和として整理すると，

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{n} (a_k b_l) A^{k+l} \right) = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} A^p \right) = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} \right) A^p.$$

多項式でも同様に

$$h_3(x) = f(x)g(x) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{n} b_l x^l \right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{n} a_k b_l x^{k+l} \right) = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} \right) x^p.$$

となるから，$h_3(A) = f(A)g(A)$ も言えた．□

線型代数 Ia （第４回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ．

（1）A^3 および $A^{20} + A^{10} + E$ を計算せよ．

（2）A を対称行列と交代行列の和として表せ．

解答例

（1）ケイリー・ハミルトンの定理より $A^2 - A + E = O$.
よって $A^3 = (A^2 - A + E)(A + E) - E = -E$. $A^{20} + A^{10} + E = (A^3)^6 A^2 + (A^3)^3 A + E = A^2 - A + E = O$.

（2）対称行列 B，交代行列 C により $A = B + C$ と表されたとする．${}^tA = {}^tB + {}^tC = B - C$．これより $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$，$C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ となる．逆に $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$，$C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ と定めると，${}^tB = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A) = B$，${}^tC = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -C$．よって B は対称行列，C は交代行列である．また，$A = B + C$ を満たす．よって，上記の B, C が唯一の解として存在し，

$$B = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

線型代数 Ia （第３回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（1）行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ に対して, $X + Y = A$, $-X + 2Y = B$ となる行列 X, Y を求めよ.

（2）$A_1, A_2, \ldots, A_k$ を行列とし，$i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対し A_i の列数と A_{i+1} の行数は等しいとする．次を証明せよ.

$$ {}^t(A_1 A_2 \cdots A_k) = {}^tA_k \cdots {}^tA_2\, {}^tA_1 $$

（∞）今日の授業内容について自由に書いてください．テキスト第１章の章末問題を解いてください.

解答例

（1）式を加えて $3Y = A+B$．これより $Y = \frac{1}{3}(A+B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$．第１式から $X = A-Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

（2）サイズについての条件から両辺の積は定まる．数学的帰納法による．$k = 1$ のときは両辺は ${}^tA_1$ に等しい．k のとき正しいと仮定すると，${}^t(A_1 \cdots A_k A_{k+1}) = {}^t((A_1 \cdots A_k)A_{k+1}) = {}^tA_{k+1}\, {}^t(A_1 \cdots A_k) = {}^tA_{k+1}\, {}^tA_k \cdots {}^tA_1$．よって $k+1$ のときも正しい.

線型代数 Ia （第２回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（1） $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする．外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算し，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で張られる平行六面体 P の体積を求めよ．

（2） $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形を底面とみたときの P の高さを求めよ．

（3*）平面の相異なる 2 点 (a, b)，(a', b') を通る直線の方程式は，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}') \cdot \boldsymbol{x} = 0$ で表されることを示せ．ただし $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

解答例

（1） $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

平行六面体の体積は，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -10$ の絶対値 10 に等しい．

（2）底面積は $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \right| = 5\sqrt{2}$.

高さは体積を底面積で割って $10/5\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

（別解）平面 α は原点を通り $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を法線ベクトルとするから，α の方程式は $3x - 4y - 5z = 0$．点と平面の距離の公式より，求める距離は

$$\frac{|3(-1) - 4(-2) - 5 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = \sqrt{2}.$$

（3）与式は x, y の 1 次式であり，$(a, b) \neq (a', b')$ より 1 次の係数のいずれかは 0 でないので平面直線を表す．外積の直交性から，2 点の座標を代入すると 0 になるので 2 点を通る．

線型代数 Ia （第１回）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

（１）$\dfrac{2+i}{3-i}$ を計算し，極座標表示せよ．

（２）方程式 $x^6-1=0$ を複素数の範囲で解け．

（２*）方程式 $x^8-1=0$ を複素数の範囲で解け．

（３）$(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$ に対し，$(x,y)(x',y'):=(xx'-yy',xy'+yx')$，$\overline{(x,y)}:=(x,-y)$ と定める．
次を確かめよ．$\overline{(x,y)+(x',y')}=\overline{(x,y)}+\overline{(x',y')}$，　$\overline{(x,y)(x',y')}=\overline{(x,y)}\;\overline{(x',y')}$，

（∞）今日の授業の内容について自由に書いてください．

解答例（１）分母に共役複素数を掛けて「有理化」する．

$\dfrac{2+i}{3-i}=\dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{1}{2}(1+i)$．極座標表示すると，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$．

（２）$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ より，$x=\pm 1,\pm\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（複号任意）．

（２*）$x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ であり，$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ である．よって $x=\pm 1,\pm i,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（複号任意）．
※授業の流れから極座標で求めた人もいるであろうが，間違いではない．

（３）定義に従って両辺を計算する．
$\overline{(x,y)+(x',y')}=\overline{(x+x',y+y')}=(x+x',-y-y')$．
$\overline{(x,y)}+\overline{(x',y')}=(x,-y)+(x',-y')=(x+x',-y-y')$．
よって $\overline{(x,y)+(x',y')}=\overline{(x,y)}+\overline{(x',y')}$．
$\overline{(x,y)(x',y')}=\overline{(xx'-yy',xy'+yx')}=(xx'-yy',-xy'-yx')$．
$\overline{(x,y)}\;\overline{(x',y')}=(x,-y)(x',-y')=(xx'-(-y)(-y'),x(-y')+(-y)x')=(xx'-yy',-xy'-yx')$．
よって $\overline{(x,y)(x',y')}=\overline{(x,y)}\;\overline{(x',y')}$，