5　数列

数が一列に並んだものを数列といいます[1]．高校で，漸化式が与えられたときに一般項を求める方法をいくつか習いました．例えば，初項 a，交差 d の等差数列の第 n 項（一般項）は，$a_n = a + (n-1)d$ となりますし，初項 a，公比 r の数列の一般項は $a_n = ar^{n-1}$ です．今回の講義では，数列を（1）関数と見る（2）ベクトルと見る（3）式と見る，といったように，いろいろ視点を変えて眺めてみましょう．

初項を a_0 とすることもありますが，本質的な差はありません．

5.1　数列は関数である：差分

数列 a_n は，n 番目に a_n という数が指定されているという意味で，自然数の全体の上の実数値関数 $a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ と思えます．その意味で，a_n を $a(n)$ と書いてみましょう．同様に，平面の点列 $P_1, P_2, \ldots$ なら自然数から平面への写像 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}^2$ と同一視できます．写像については，テキスト $pp.$56–59.

差分

n が 1 増えたときの関数の変化は，

$$\Delta a(n) := a(n+1) - a(n)$$

となります．これを $a(n)$ の**差分**といいます．並べて数列と見ると $\{a_n\}$ の階差数列に他なりません．[2]

関数の変化率（導関数）から元の関数が積分で表されるように，簡単な場合は，階差数列の和（**和分**）で一般項を求めることができます．[3]

ジョルダンの階乗関数

n 個のものから r 個とって並べる順列 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を，r を固定して n の関数と思います．よく $(n)_r$ などと書かれ，**ジョルダンの階乗関数**と呼ばれます．

差分を計算してみましょう．

命題 5.1 $(n+1)_r - (n)_r = r(n)_{r-1}$

証明 $(n+1)_r - (n)_r = (n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2) - n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1) = \{(n+1) - (n-r+1)\}n(n-1)\cdots(n-r+2) = r(n)_{r-1}$．□

多項式の和分

k に関する多項式 $f(k)$ を，$k=1$ から n まで加えた和 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ を計算する方法を与えましょう．

$f(k)$ をジョルダンの階乗関数の一次結合に表す.

$f(k)$ が k の m 次式であるとき，

$$f(k) = a_m(k)_m + a_{m-1}(k)_{m-1} + \cdots + a_1(k)_1 + a_0(k)_0$$

と表されます．[4] $(k)_1 = k$，$(k)_0 = 1$ です．ここで，係数 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ は次のようにして求まります．

両辺に $k=0$ を代入すると，$f(0) = a_0$ から a_0 が決まります．次に $k=1$ を代入すると，$f(1) = a_1 + a_0$ から a_1 が決まります．$k=2$ を代入して $f(2) = 2a_2 + 2a_1 + a_0$ から a_2 が求まり，以下順次 $k = 3, \ldots, m$ まで代入することで，すべての a_k が求まります．

$\sum_{k=1}^{n}(k)_r = \frac{(n+1)_{r+1}}{r+1}$ （$r \geq 1$），$\sum_{k=1}^{n}(k)_0 = n$ を用いて和分を計算する．[5]

---

[1] よく $\{a_n\}$ と書かれますが，集合ではなく順序が決まっているので，本当は括弧を用いて (a_n) と表す方が整合性があります．

[2] 逆に，関数 $f(x)$ の方も，実数 x ごとに $f(x)$ という数が指定されているので，添え字が無限に細かく並んだ数列と思うこともできます.「隣の実数」といったものはないので，変化率は微分で表します．

[3] 複雑な場合は，さらに高階の差分を取ることもあります．

[4] この事実は，まず m 次の項を $(k)_m$ の定数倍で作り，残りの $m-1$ 次の項を $(k)_{m-1}$ の定数倍で作り，…とすることで示せます（厳密には，m に関する帰納法）．$1, k, k^2, \ldots$ から $1, (k)_1, (k)_2, \ldots$ へ，線形代数でいう基底の変換を行っています．

[5] 和の範囲を $0 \leq k \leq n-1$ とすると，$\sum_{k=0}^{n-1}(k)_r = \frac{(n)_{r+1}}{r+1}$ （$r \geq 0$）と簡潔になり，和分の繰り返しも簡単になります．

例　4 次のべき和 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めてみましょう．

$$k^4 = a(k)_4 + b(k)_3 + c(k)_2 + dk + e$$

とおく．$k=0$ を代入して $e=0$ がわかる．$k=1$ を代入して $d=1$ がわかる．$k=2$ を代入して $16=2c+2$ より $c=7$．$k=3$ を代入して $81=6b+42+3$ より $b=6$．最高次の係数を比較して $a=1$．よって

$$k^4 = (k)_4 + 6(k)_3 + 7(k)_2 + k$$

両辺の $k=1$ から n までの和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n+1)_5}{5} + 6\frac{(n+1)_4}{4} + 7\frac{(n+1)_3}{3} + \frac{(n+1)_2}{2}$$

あえて展開して整理すると，$= \dfrac{n(n+1)}{30}\{6(n-1)(n-2)(n-3)+45(n-1)(n-2)+70(n-1)+15\} = \dfrac{n(n+1)}{30}(6n^3-36n^2+66n-36+45n^2-135n+90+70n-70+15) = \dfrac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1)$

注　低次の $\sum_{k=1}^{n} k^3$ などをあらかじめ計算しておく必要がありません．何次式でもいきなり計算できます．

まとめると，多項式の差分・和分は，ジョルダンの階乗関数を基底として表すと簡単に計算できます．x^r の微分は rx^{r-1} であり，テイラー展開を用いると，簡単に項別微分・積分ができるように，$(n)_r$ の差分は $r(n)_{r-1}$ であり，ジョルダンの階乗関数を用いて展開すると，差分・和分が項別に簡単に計算できます．

また，テイラー展開の各項は，その点での（高階の）微分係数からわかりますが，階乗関数でも，$k=0,1,2,\ldots$ の値を順次代入することで求めることができます．

注　ここではジョルダンの階乗関数を用いて説明しましたが，もう少し便利な基底の取り方もあります．微分で係数が出ないように書き換えると，$x^r/r!$ の微分は $x^{r-1}/(r-1)!$ となります．この対応物は組合せ $(n)_r/r! = {}_nC_r$ になり，$(n+1)_r/r! - (n)_r/r! = (n)_{r-1}/(r-1)!$ となります．$(n)_r/r!$ は「任意の整数 n に対し整数値をとる」という性質があり，一般にその性質を満たす，n の多項式で表される数列は，$(n)_r/r!$（$r=0,1,2,\ldots$）の 整数 係数一次結合で表されることが，たとえば次数に関する帰納法により示されます．m 次多項式の微分が $x^r/r!$ を基底として表すとジョルダンの標準形 $J(0,m)$ で表されるのと同じように，階差は組み合わせを基底として表すと，ジョルダンの標準形 $J(0,m)$ で表されます．

注　参考：ラグランジュの補間法を用いる手もあります．$\sum_{k=1}^{n} k^4$ が n の 5 次式になることはすぐわかります．高々5 次式は 6 点の値で決まるので，たとえば $n=0,1,2,3,4,5$ をとると，高々5 次式全体からなるベクトル空間の基底として，$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ を割り切る 5 次式（最高次の係数を 1 とするとちょうど 6 つあります）をとることができます．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = a(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + bn(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + cn(n-1)(n-3)(n-4)(n-5) + dn(n-1)(n-2)(n-4)(n-5) + en(n-1)(n-2)(n-3)(n-5) + fn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

係数 a,b,c,d,e,f は n に $0,1,2,3,4,5$ を代入することで求まります.（略）

5.2　数列はベクトルである：連立一次方程式の解の構造定理

漸化式で，a_n, a_{n+1} について 1 次式であるものを考えてみましょう．

$$a_{n+1} = p_n a_n + q_n \quad (p_n, q_n \text{ は既知の数列 })$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を未知数と見ると，この形の漸化式は $a_n - p_{n-1}a_{n-1} = q_{n-1}$，$a_{n-1} - p_{n-2}a_{n-2} = q_{n-2}$，$\cdots$，$a_2 - p_1 a_1 = q_1$ となり，連立一次方程式に他なりません．したがって，線形代数で習った連立一次方程式の構造定理から，一般解は，特殊解と，同伴な同次方程式の一般解の和として表すことができます．同次方程式とは $a'_{n+1} = p_n a'_n$ のことなので，たとえば p_n が定数なら等比数列となります．一般には $a'_n = a'_1 \prod_{k=1}^{n-1} p_k$ と，一般項を簡単に求めることができます．多項間漸化式についても 1 次式なら基本は同じです．

注　線形代数で習ったように，関数 $f(x)$ も，各 $f(x)$ が「x 番目」の成分であるとみなして，無限につながっているベクトルというイメージで扱うこともできます．これは，普通に関数の全体をベクトル空間と見る方法と同じです．定数係数線形常微分方程式の一般解を行列を用いて解く方法をすでに習っています．

5.3 数列は式である：母関数

母関数

数列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

に対し[6]，ひとまとめにした式

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を**母関数** (generating function) といいます．数列が無限に続いているなら，x のべきも無限に続いていくことにします．式なので足したり引いたり掛けたりできます．ただし，低次の項から順次計算するという約束にします．正確には**形式的べき級数**と呼ばれますが，ここでは立ち入りません．たいていの場合は，関数の $x=0$ における Taylor 級数（収束べき級数）と思って差し支えありません．

等比数列の母関数

$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ に対し，$xf = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$ となるので，xf は，項を一つずらした $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の母関数です．すべての $n \geq 0$ に対し $a_{n+1} = r a_n$ を満たすことと，$(1-rx)f = a_0$ とは同値です．よって，初項 a_0，公比 r の等比数列の母関数は

$$f = a_0 + a_0 r x + a_0 r^2 x^2 + \cdots =: \frac{a_0}{1-rx}$$

と表されます．

母関数による漸化式の解法

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 1$（$n \geq 1$），$a_0 = 0$ を満たす数列の一般項を母関数の部分分数展開を用いて求めてみます．

母関数を f とすると，xf の x^n（$n \geq 1$）の係数は a_{n-1} である．また，x^n（$n \geq 1$）の係数が -1 となるべき級数は $-x - x^2 - x^3 - \cdots = -x/(1-x)$ であるから，

$$(1-2x)f = -\frac{x}{1-x}.$$

これは x^0 の係数についても成りたつ．これより

$$f = -\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2^n) x^n.$$

よって $a_n = 1 - 2^n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）．

注　もし漸化式が $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$ なら，

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} + \cdots)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

を用いることができます．

注　参考：急速に増大する数列などのように，指数型母関数

$$f = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

が有用な場合もあります．単純に項をずらす操作は

$$\frac{df}{dx} = a_1 + a_2 \frac{x}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

と微分で表されるので，漸化式を f の微分方程式として表せることがあります．

逆に微分方程式の解（形式解・近似解）を，べき級数展開して係数の漸化式から求める方法で得ることもあります．

[6] ここでは簡単のため数列は a_0 から始まっているとします．

級数の和は $x=1$ を代入して（収束すれば）得られます．交代和なら $x=-1$ です．たとえば，二項定理を用いると組み合わせの和や交代和が求まります．また，自然数とは限らない実数 α に対しても，

$$(1+x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r, \quad \binom{\alpha}{r} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$$

が成り立ちます．係数 $\binom{\alpha}{r}$ は一般化された二項係数と呼ばれます．

6　数え上げ

この講義では，主に有限個の要素からなる集合を扱います．数え上げ（場合の数）とは,「決められた集合の要素の数を与えること」をいいます．

6.1　有限集合・無限集合

テキスト：*pp.*13,14,63,64.

無限集合でも，要素が「無限にある」からといって，必要なだけいくらでもあるというわけではありません．無限にも大きさの差が存在します．無限集合も含めた「要素の個数」を**濃度**といいます．厳密には，二つの集合はその間に全単射が存在するとき濃度が等しいと定義します．

自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ との間に全単射が存在する集合を**可算集合・可附番集合**であるといいます．**カントールの対角線論法**によって，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の濃度はこれより真に大きいことが示されます．一般に，べき集合の濃度は元の集合の濃度より大きくなります．

6.2　基本的な数え上げの例

順列 ${}_nP_r$，組合せ ${}_nC_r$，重複順列 n^r，円順列はすでに習っていると思います．

重複組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個選ぶ場合の数を ${}_nH_r$ と書きます．

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$$

が成り立ちます．

例　$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r$ を展開したときの，異なる単項式の個数は ${}_nH_r$ に等しくなります．

母関数は，

$$(1+x+x^2+\cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} {}_nH_r x^r$$

となります．

例　$x_1+x_2+x_3+x_4=12$，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 2$，$x_3 \geq 1$，$x_4 \geq 3$ を満たす整数解の個数を求めよ．

$y_1=x_1$，$y_2=x_2-2$，$y_3=x_3-1$，$y_4=x_4-3$ とおくと，$y_1+y_2+y_3+y_4=6$，$y_i \geq 0$（$1 \leq i \leq 4$）を満たす整数解の個数を求めればよい．それは 4 個の中から重複を許して 6 個とる場合の数に等しいから，${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$.

例　$x_1+x_2+x_3=8$，$x_1 \geq 1$，$x_2 \geq 1$，$x_3 \geq 0$ を満たす整数解の個数を求めよ．

$y_1=x_1-1$，$y_2=x_2-1$，$y_3=x_3$ とおくと，$y_1+y_2+y_3=6$，$y_i \geq 0$（$1 \leq i \leq 3$）を満たす整数解の個数を求めればよい．それは 3 個の中から重複を許して 6 個とる場合の数に等しいから，${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$.

多項定理

$(1+x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ を展開したときの $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_m^{r_m}$ の係数（**多項係数**）は

$$\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_m} := \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}}{r_m}$$

となります（$n \geq r_1+r_2+\cdots+r_m$）．

分割数

正の整数 n を，1 個以上の正の整数の和として表す方法の数を，**分割数**といい $p(n)$ で表します．ただし，和の順序は問わないことにします．たとえば，$n=4$ に対する分割の方法は $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ がすべてであるので，$p(4)=5$ となります．母関数は次の通りです．

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$$

7　数え上げ 2

重複円順列を題材にしていくつかの重要な概念を学びます．

7.1　特性関数

全体集合 U の部分集合 A に対し，関数 $\chi_A : U \to \{0,1\}$ を次のように定めます．

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$$

χ_A は A の**特性関数**と呼ばれます．

特性関数の和（積分）はその集合の位数（体積）になります：

命題 7.1 有限集合 U の部分集合 A に対し，$|A|=\sum_{x\in U}\chi_A(x)$.

命題 7.2 $\chi_U\equiv 1$，$\chi_\varnothing\equiv 0$，$\chi_{\bar{A}}=1-\chi_A$，$\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$，$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$.

証明　最後以外は明らか.

$\chi_{A\cup B}=1-\chi_{\overline{A\cup B}}=1-\chi_{\bar{A}\cap\bar{B}}=1-\chi_{\bar{A}}\chi_{\bar{B}}=1-(1-\chi_A)(1-\chi_B)=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$. □

あるいは，$x\in U$ が A,B に属するかで場合分けして，それぞれの場合に両辺が等しい値をとることを確かめても示せます.

例　問題：$A\subseteqq B \iff \forall x\ \chi_A(x)\leqq\chi_B(x)$ を示せ.

7.2　包含と排除の原理（包除原理，PIE）

命題 7.3 有限集合 U の部分集合 $X_1,X_2,\ldots,X_k$ に対し，次が成立します.

$$|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k|=\sum_{i=1}^{k}|X_i|-\sum_{i_1<i_2}|X_{i_1}\cap X_{i_2}|+\sum_{i_1<i_2<i_3}|X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap X_{i_3}|-\cdots+(-1)^k|X_1\cap X_2\cap\cdots X_k|$$

証明　X_i の特性関数を χ_i とすると，$\overline{X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k}$ の特性関数は，ド・モルガンの法則から $\prod_i(1-\chi_i)$ となる．よって $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k$ の特性関数は $1-\prod_i(1-\chi_i)$．これを展開して U 上で和をとればよい.
□

例　1 から 1000 までの整数のうちで，$2,3,5$ と互いに素なものはいくつあるか.

解答：2，3，5 の倍数はそれぞれ 500 個，333 個，200 個．6，10，15 の倍数はそれぞれ 166 個，100 個，66 個．30 の倍数は 33 個である．*PIE* より，$1000-500-333-200+166+100+66-33=266$ 個.

例　ある会社の機密情報にアクセスするには，専用ＰＣ室のパスワード・内部ネットワークのパスワードなど，合計 *10* 個の鍵が必要である．重役A，B，Cはそのうちそれぞれ 5，4，4 個を持っている．所属部署から，A と B は 2 個の鍵を共有し，C は A とも B とも 1 個の鍵を共有することがわかっている．さて，3 人の持っている鍵を合わせると機密情報にアクセスできるようになるといえるだろうか？

解答：PIE を用いると，3 人の持っている鍵の個数は，$5+4+4-2-1-1$ に，3 人全員が共有する鍵の個数を加えたものである．従って，C が A，B と共有する鍵が同じ場合はアクセス可能，そうでなければ不可能である．

7.3　置換と対称性

異なる n 個のものから r 個を選んで並べる場合の数は ${}_nP_r$ である．このうち，何が選ばれるかだけに着目して，並べ方の違いは無視して，同じ選び方と思うと，一つの選び方に対し，並べ方は $r!$ 通りあるから，${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$ となるのであった．

対称群

（テキスト第 2 章§2 $\boxed{2}$・第 3 章§2 $\boxed{4}$・線形代数第 6 章）n 個の元からなる集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の全単射 σ の全体で表す．σ は n 文字の**置換**とも呼ばれる．置換は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の変換であるから合成ができて，合成も置換である．n 文字の置換の全体は，合成を積として群の公理を満たす．これを n 次の**対称群**と呼び，$\mathfrak{S}_n$ あるいは S_n と書く．位数（要素の個数）は $n!$ である．

同値関係

（テキスト第 2 章§1 $\boxed{4}$）例：数の等号，　mod n，集合の濃度

対称性のある集合の数え上げ

ダイヤモンド・ルビー・サファイア 3 種類の宝石を，6 つの台座が等間隔に並ぶ円形のペンダントにはめ込む．回転して重なる配置は同じデザインであると思うとき，デザインは何通りあるだろうか．

重複円順列である。単純な円順列の場合とは異なり、デザインによっては異なる回転対称性を持つため、単純に全ての配置の数を 6 で割るわけにはいかない。2 通り解答を示す。

解 1：

(1) デザインが 6 回対称性を持つ場合。6 個とも同じ宝石になるので 3 通り。

(2) (1) 以外でデザインに 3 回対称性がある場合。(1) を含めると、120 度ごとに同じ宝石が並ぶので 3^2 通り。(1) の 3 通りを除いて 2 個の並び方で割ると、$(3^2-3)/2 = 3$. あるいは、2 種類の宝石を選ぶ組合わせで 3 通り。

(3) (1) 以外でデザインに 2 回対称性がある場合。まず (1) も含めて考える。向かい合う 2 個は同じ宝石になり、その選び方が 3^3 通りあるが、(1) の 3 通りを引いてから、回転して重なるのが 3 通りずつあるから $(3^3-3)/3 = 8$ 通り。

(4) それ以外。すべての選び方は 3^6 通り。(1) から (3) を除いてから円順列にすると、PIE より $(3^6-3^3-3^2+3)/6 = 116$ 通り。

以上を加えて、$3+3+8+116 = 130$ 通り。

解 2：次の定理を用いると，S として宝石の配置（3^6 個の元からなる）、群として位数 6 の回転を取ると、$(3^6+3\times 2+3^2\times 2+3^3)/6 = 130$ 通り。

定理 7.4 (Frobenius-Burnside の定理) 群 G が集合 S に作用しているとき、S の G の作用による剰余類の元の個数は、

$$\#\{(g,s) \in G \times S | g(s) = s\}/\#(G)$$

に等しい。