幾何学B演習問題（小林）

1 $\boldsymbol{R}^2$ において，微分形式 $\varphi = x_1dx_2 - x_2dx_1$ と，点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ における接ベクトル

$$v = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_2}$$

に対し，$\varphi(v)$ を求めよ．

2 $\varphi = xdy$ とする．次の道 γ に沿った線積分 $\int_\gamma \varphi$ を直接計算せよ．(1) 中心 (a,b)，半径 r の円周（反時計回り），(2) 辺が x 軸と y 軸に平行であり，長さがそれぞれ a, b である長方形（反時計回り）．

3 線積分

$$\int_\gamma \varphi := \int_{t_0}^{t_1} \{f(\xi(t), \eta(t))\xi'(t) + g(\xi(t), \eta(t))\eta'(t)\}dt$$

に対し，次を示せ．

$t = \tau(s)$，$s_0 \leq s \leq s_1$ は $\tau(s_0) = t_0$，$\tau(s_1) = t_1$ を満たす区分的に C^1 級である連続な増加関数とし，$\varphi(s) := \xi(\tau(s))$，$\psi(s) := \eta(\tau(s))$ とするとき，

$$\int_{t_0}^{t_1} \{f(\xi(t), \eta(t))\xi'(t) + g(\xi(t), \eta(t))\eta'(t)\}dt = \int_{s_0}^{s_1} \{f(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) + g(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s)\}ds$$

である．

※ $(\xi(t), \eta(t))$（$t \in [t_0, t_1]$），$(\varphi(s), \psi(s))$（$s \in [s_0, s_1]$）は，ともに C^1 級で常に $||(\xi'(t), \eta'(t))|| > 0$，$||(\varphi'(s), \psi'(s))|| > 0$ であり，始点と終点が等しく，共通の像への全単射をそれぞれ与えるとする．このとき，C^1 級増加関数 $t = \tau(s)$ が存在して $\varphi(s) = \xi(\tau(s))$，$\psi(s) = \eta(\tau(s))$ となることが示せる．

4 $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^1 級 1 形式で積分可能条件を満たさない例を与えよ．

5 複素平面上の C^1 級関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$（$z = x + iy$）に対し，$f(z)dz$ の積分可能条件（実部・虚部それぞれに考える）は，u, v に関するコーシー・リーマン関係式と同値であることを示せ．

6 平面の，原点以外で定義された微分形式

$$\varphi = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

と道 $\gamma : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$，$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ に対し，線積分 $\int_\gamma \varphi$ を計算せよ．

特に，$\varphi = dF$ となる C^1 級関数 F は存在しないことを説明せよ．

7 U を $\boldsymbol{R}^n$ の領域とし，$P \in U$ とする．U の中の区分的に滑らかな連続曲線で P と結べる U の点の全体を V とし，結べない U の点の全体を V' とする．

(1) V は P を含む開集合であることを示せ．

(2) V' は開集合であることを示せ．

(3) $U = V$ であることを示せ．

8 (1) $\boldsymbol{R}^4$ 上の 2 形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ に対し，$\omega \wedge \omega$ を計算せよ．

(2) $\boldsymbol{R}^{2m}$ 上の 2 形式

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2m-1} \wedge dx_{2m}$$

に対し，$\bigwedge^m \omega$ を計算し，0 にならないことを示せ．

9 $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U 上の C^1 級関数 $f(x,y), g(x,y)$ に対し，全微分の外積 $df \wedge dg$ を dx, dy で表せ．

10 $\boldsymbol{R}^3$ の開集合 U 上の 1 形式

$$\varphi = \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3, \quad \psi = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \psi_3 dx_3$$

に対し，$\varphi \wedge \psi$ を求めよ．

※答えを出したあとで，空間ベクトルの外積 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ と比較せよ．

11 $\boldsymbol{R}^4$ の 2 形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ は，どのような 1 形式 φ, ψ を用いても $\omega = \varphi \wedge \psi$ と一つの外積の形に書くことはできない．これを示せ．

12 $\boldsymbol{R}^3$ の座標を (x, y, z) とするとき，次の微分形式の外微分を計算せよ．

(1) $yzdx + xzdy + xydz$　(2) $zdx + xdy + ydz$　(3) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$

13 問 **6** の φ について，外微分 $d\varphi$ を計算せよ．

14 $\boldsymbol{R}^3$ において以下の外微分を計算し，grad，rot，div との対応を確認せよ．$x = (x_1, x_2, x_3)$ とする．

(1) 関数 $F(x)$

(2) 1 形式 $\varphi = \varphi_1(x)dx_1 + \varphi_2(x)dx_2 + \varphi_3(x)dx_3$

(3) 2 形式 $\eta = \eta_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + \eta_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + \eta_3(x)dx_1 \wedge dx_2$

(4) 3 形式 $f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

15 $\boldsymbol{R}^4$ の座標を (t, x, y, z) で表し，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^3$ に分けて微分形式の計算をしてみよう．U を $\boldsymbol{R}^4$ の空でない開集合とする．$E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ を U 上で定義された滑らかな関数であるとし，U 上の 2 形式 F を

$$F := (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

で定める．

(1) dF を計算し，$dF = 0$ は

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0}$$

と同値であることを示せ．ただし，

$$\boldsymbol{E} := (E_x, E_y, E_z), \quad \boldsymbol{B} := (B_x, B_y, B_z), \quad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

(2) U 上の 2 形式

$$*F := -(B_x dx + B_y dy + B_z dz) \wedge dt + E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$$

に対し，$F \wedge *F$ を計算せよ．

(3) $J := -d(*F)$ を

$$J = -\rho dx \wedge dy \wedge dz + (j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy) \wedge dt$$

と書くとき次を示せ．

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho}$$

(4) dJ を計算し，

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

を示せ．ただし，$\boldsymbol{j} = (j_x, j_y, j_z)$ である．

(5) $A = -\phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$ とすると，$F = dA$ となることは，

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}}$$

と同値であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ とする．

(6) $F = dA$ となる A は一意的とは限らない．U 上の任意の滑らかな関数 ψ に対し，$A' = A + d\psi$ は $F = dA'$ を満たすことを示せ．

(7) U 上の 3 形式

$$*A := \phi dx \wedge dy \wedge dz - (A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy) \wedge dt$$

に対し，$d(*A) = 0$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

と同値であることを示せ．

(8) $d * dA = -J$ であるが，これは (7) の条件のもとでは，

$$\Box := -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

（ダランベルシアン）に対し

$$\Box \phi = -\rho, \quad \Box \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{j}$$

と同値であることを示せ．

※ $\boldsymbol{E}$ を電場，$\boldsymbol{B}$ を磁場とする．光速 $c = 1$，真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 1$ のもとで，(1)(3) は真空中の電磁場における Maxwell の方程式である．(2)(8) の $*$ は Minkowski 計量 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ に関する Hodge $*$ 作用素である．ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度であり，(4) は連続の方程式と呼ばれる．ϕ はスカラーポテンシャル，$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれ，(6) はゲージ変換の例，(7) の条件を Lorentz ゲージと呼ぶ．(8) の方程式は，適当な条件のもとで解ける（δ 関数に対する解（Green 関数）を畳み込む）．

$\boldsymbol{R}^3$ の Euclid 計量 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ に関する Hodge $*$ 作用素のときは，関数の $d * d$ はラプラシアン $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ と対応し，$d * dF = (\triangle F) dx \wedge dy \wedge dz$ である．ベクトル場で表すと $\triangle F = \operatorname{div} \operatorname{grad} F$ である．

16 $\boldsymbol{R}^4$ の 2 形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ を考える．2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix}$ で張られる部分空間 V に対し，$\omega|_V = 0$ となるための必要十分条件を求めよ．

ただし，V の一つのパラメータ表示を $f : \boldsymbol{R}^2 \to V$，$(s, t) \mapsto s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2$ として，$\omega|_V$ とは $f^*\omega$ のことであるとする．

17 $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{O\}$ において，$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし，次の 2 形式 ω を考える．

$$\omega := \frac{1}{r^3}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$$

(1) dr および $dr \wedge \omega$ を計算せよ．

(2) ω が閉形式であることを示せ．

(3) $a > 0$，$\theta_0 \leq \theta_1$，$\varphi_0 \leq \varphi_1$ として，写像 $\gamma : [\theta_0, \theta_1] \times [\varphi_0, \varphi_1] \to \boldsymbol{R}^3 \setminus \{O\}$ を次で定める．

$$(\theta, \varphi) \mapsto (a \cos\theta \cos\varphi, \ a \sin\theta \cos\varphi, \ a \sin\varphi)$$

$\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求めよ．特に，$\theta_0 = -\pi$，$\theta_1 = \pi$，$\varphi_0 = -\pi/2$，$\varphi_1 = \pi/2$ のときの値はいくらか．

(4) ω は完全形式ではないことを示せ．

18 $\gamma:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to \boldsymbol{R}^4$ を $(s,t)\mapsto(\cos s,\sin s,\cos t,\sin t)$ で定める．像は $x_1^2+x_2^2=1$ かつ $x_3^2+x_4^2=1$ で定まる曲面 S になる．

(1) $\omega=(x_1dx_2-x_2dx_1)\wedge(x_3dx_4-x_4dx_3)$ とするとき，$\gamma^*\omega$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_\gamma\omega$ を計算せよ．

19 $z\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ と $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{O\}$ を，$z=x+iy=re^{i\theta}$ により同一視する．(r,θ) は極座標である．

(1) $\dfrac{dz}{z}=d\log z=d\log r+i\,d\theta$ を確かめ，$d\log r$，$d\theta$ をそれぞれ x,y で表せ．

(2) $k\in\boldsymbol{Z}$ とし，$\rho:[0,1]\to\boldsymbol{R}_{>0}$ を正の実数値をとる C^1 級関数で $\rho(0)=\rho(1)$ を満たすとする．$\gamma:[0,1]\ni t\mapsto(\rho(t)\cos 2\pi kt,\rho(t)\sin 2\pi kt)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{O\}$ に対し，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z}$ を（留数定理を使わずに）求めよ．

20 $S^1=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ について次の問いに答えよ．

(1) 座標近傍系として，$\{(U_{x>0},y),(U_{x<0},y),(U_{y>0},x),(U_{y<0},x)\}$ を取る．ただし $U_{x>0}:=S^1\cap\{x>0\}$ 等とする．それぞれで 1 形式を

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

で定めると，共通部分で貼り合い S^1 上の 1 形式 ω が定まることを示せ．

(2) ω は S^1 のどの点でも 0 にならないことを示せ．

(3) S^1 上の任意の 1 形式 η に対し，$\eta=f\omega$ となる滑らかな関数 $f:S^1\to\boldsymbol{R}$ が存在することを示せ．

(4) $\sigma:S^1\to S^1$ を $(x,y)\mapsto(x,-y)$ で定めるとき，$\sigma^*\omega=-\omega$ を示せ．

(5) S^1 上の 1 形式 η が $\sigma^*\eta=\eta$ を満たすとき，点 $(\pm1,0)$ において $\eta=0$ であることを示せ．

21 問 **20** の ω を用いる．S^1 の点 $N(-1,0)$ を除いた開集合を U_0 とする．局所座標 $\varphi_0:U_0\to\boldsymbol{R}$ が $(x,y)\mapsto t:=\dfrac{y}{x+1}$ で定まる．同様に，$S(1,0)$，$U_1:=S^1\setminus\{S\}$ として，$\varphi_1:U_1\to\boldsymbol{R}$ を $(x,y)\mapsto u:=\dfrac{y}{x-1}$ で定める．φ_0,φ_1 が同相写像であることは認めてよい．

(1) 座標変換 $u=\varphi_{10}(t)$ を t の式で表せ.（ヒント：tu を計算する）

(2) $\omega_1:=\dfrac{2du}{1+u^2}$ に対し，$\varphi_{10}^*(\omega_1)$ を計算せよ．

(3) $\omega|_{U_1}=\omega_1$ を示せ．$\omega|_{U_0}$ を t で表せ．

(4) $S^1\subset\boldsymbol{R}^2$ に関して，$(-y\,dx+x\,dy)|_{S^1}=\omega$ を示せ.（各座標近傍上で一致することを示す）

(5) $B^2:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid x^2+y^2\le1\}$ の標準的向き付け（$dx\wedge dy$ から定まる向き付け）の境界として定まる S^1 の向き付けと，ω から定まる S^1 の向き付けは同値であることを示せ．

(6) 向き付け ω に関して，$\int_{S^1}\omega$ を求めよ．

(7) ω は完全でない閉形式であることを示せ．

22 問 **20**，**21** の記号を用いる．

(1) $f:\boldsymbol{R}\to S^1$ を $\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)$ で定める．$f^*\omega=d\theta$ であることを示せ．

(2) f は局所微分同相写像であることを示せ.（逆関数の定理を用いよ）

(3) U_0,U_1 上でそれぞれ f^{-1} の主値を選び $\psi_0:U_0\to(-\pi,\pi)$，$\psi_1:U_1\to(0,2\pi)$ とする．$U_0\cap U_1$ 上で $\psi_{10}^*d\theta=d\theta$ を示せ．ただし共通部分は 2 つの連結成分 $U_{y>0}$ と $U_{y<0}$ からなることに注意せよ．

(4) $d\theta$ が貼り合ってできる 1 形式は ω と一致することを説明せよ．

(5) $\iota:S^1\to S^1$ を $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ で定める．$\iota^*\omega=\omega$ を示せ．

23 U, V を $\boldsymbol{R}\times[-1,1]$ の 2 つのコピーとし，それぞれの座標を (x,s)，(y,t) とする．$\{(x,s)\in U \mid x\neq 0\}$ と $\{(y,t)\in V \mid y\neq 0\}$ を次の座標変換 φ で同一視する．

$$(y,t)=\varphi(x,s)=\begin{cases}(\frac{1}{x},s) & (x>0)\\ (\frac{1}{x},-s) & (x<0)\end{cases}$$

貼り合わせてできる境界つき多様体 $M=U\cup V$ を**メビウスの帯** *(Möbius band)* という．

(1) φ は可微分同相写像であることを確かめよ．

(2) メビウスの帯は向き付け不可能であることを示せ．

(3) S^1 から $x_1=0$ となる 2 点を除いた開集合を U_1 とし，$x_2=0$ となる 2 点を除いた開集合を U_2 とする．S^1 から ∂M への可微分写像 f が，

$$U_1\ni(x_1,x_2)\mapsto\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_1}{|x_1|}\right)\in U$$
$$U_2\ni(x_1,x_2)\mapsto\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{|x_2|}\right)\in V$$

により定まることを示せ．(微分可能であり，共通部分 $U_1\cap U_2$ で像が一致することを示せ.)

(4) 境界 ∂M は S^1 と可微分同相であることを示せ．

24 S^2 上の 2 点 $N(0,0,1)$，点 $S(0,0,-1)$ を考える．

(1) 点 $P(x,y,z)\in U:=S^2\setminus\{N\}$ に対し，直線 NP と平面 $z=0$ の交点を $(x_1,x_2,0)$ とする．x_1,x_2 を x,y,z で表せ．

(2) 点 $P(x,y,z)\in V:=S^2\setminus\{S\}$ に対し，直線 SP と平面 $z=0$ の交点を $(y_1,y_2,0)$ とする．$P(x,y,z)\in S^2\setminus\{N,S\}$ のとき，y_1,y_2 を x_1,x_2 で表せ．

(3) $dy_1\wedge dy_2$ を x_1,x_2 で表し，$(U;x_1,x_2)$ と $(V;y_1,y_2)$ は違う向きであることを示せ．

(4) S^2 が向き付け可能であることを示せ．

(5) $\omega=xdy\wedge dz-ydx\wedge dz+zdx\wedge dy$ に対し，$\omega|_U$ を x_1,x_2 で表せ．

(6) U の向き付けを $dx_1\wedge dx_2$ で与えるとき，$\displaystyle\int_U\omega|_U$（広義積分）を計算せよ．

25 前問の記号を用いる．

(1) $\iota:S^2\to S^2$ を $(x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z)$ で与える．$\iota^*\omega=-\omega$ であることを示せ．

(2) S^2 上の 2 形式 η が $\iota^*\eta=\eta$ を満たすなら，ある点 P において $\eta(P)=0$ であることを示せ．

(3) $\pi:S^2\to\boldsymbol{R}P^2$ を標準的全射とする．$\pi\circ\iota=\pi$ に注意する．$\boldsymbol{R}P^2$ は向き付け不可能であることを示せ．

26 S^2 に $B^3:=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ の境界としての向きを入れる．
$\boldsymbol{R}^3$ の 2 形式 $\omega=xdy\wedge dz-ydx\wedge dz+zdx\wedge dy$ に対し $\displaystyle\int_{S^2}\omega|_{S^2}$ を計算せよ．

27 境界つき多様体で，境界は局所座標の選び方によらず定まることを示せ．

28 F を $\boldsymbol{R}^n$ の領域 U 上の C^1 級関数とする．$dF\equiv 0$ ならば，F は U 上定数関数であることを示せ．

29 次の $\boldsymbol{R}^3$ 上の微分形式 φ が完全ならば，$\varphi=d\psi$ となる ψ を一つ求めよ．
(1) $(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$　(2) $(x+y+z)(dx+dy+dz)$
(3) $(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$
(4) $dx\wedge dy+dy\wedge dz+dz\wedge dx$　(5) $e^{x^2+y^2}\sin z\ dx\wedge dy\wedge dz$

30 $0 < r < R$ に対し

$$T^2 := \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$
$$K := \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

とする．T^2，K はそれぞれ**トーラス** *(torus)*，**ソリッドトーラス** *(solid torus)* と呼ばれる．K には $\boldsymbol{R}^3$ から定まる向き $dx \wedge dy \wedge dz$ が入り，T^2 に K の境界としての向きを入れる．

$$\omega = \left\{ \frac{\sqrt{x^2+y^2} - R}{r\sqrt{x^2+y^2}}(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz) + \frac{z}{r} dx \wedge dy \right\}\Bigg|_{T^2}$$

とする．写像 $\gamma : D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to T^2$ を次で定める．

$$\gamma(s,t) = ((R + r\cos s)\cos t,\ (R + r\cos s)\sin t,\ r\sin s)$$

(1) γ は全射であり，T^2 は弧状連結であることを示せ．

(2) ω は T^2 上のどこでも 0 にならないことを示せ．

(3) ω は正の向きであることを示せ．

31 問 **30** の記号を用いる．ただし

$$\omega' = \frac{1}{3}(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)|_{T^2}$$

とする．

(1) ストークスの定理を用いて $\displaystyle\int_{T^2} \omega'$ を求めよ．

(2) $xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$，$xdy \wedge dz - zdx \wedge dy$ は $\boldsymbol{R}^3$ の完全形式であることを示せ．

(3) $\eta = (xdy \wedge dz)|_{T^2}$ とする．η と ω' は同じ $H^2_{DR}(T^2)$ の元を定めることを示せ．

(4) $\gamma^*\eta$ を s, t で表せ．

(5) $\displaystyle\int_\gamma \eta$ を計算せよ．

32 マイヤー・ヴィエトリスの完全系列を用いて，S^1 のド・ラムコホモロジー群を求めよ．

33 次は変位レトラクションであることを示せ．

$$r : \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to S^n, \quad r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}$$

34 位相空間 M のレトラクト A に対し，A から位相空間 X への連続写像は M からの連続写像に拡張できることを示せ．

35 M, N を位相空間とする．

(1) $F(x,t)$，$G(x,t)$ を $M \times [0,1]$ から N への連続関数とし，任意の $x \in M$ に対し $F(x,1) = G(x,0)$ であるとする．このとき次で定める $H(x,t)$ も $M \times [0,1]$ から N への連続関数であることを示せ．
$H(x,t) = F(x, 2t)$（$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$），$H(x,t) = G(x, 2t-1)$（$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$）．

(2) M から N への連続写像全体の集合に対し，ホモトピックであることは同値関係を定めることを示せ．

36 M, N を位相空間とし，N は可縮であるとする．このとき，任意の 2 つの連続写像 $f, g : M \to N$ はホモトピックであることを示せ．

37 ホモトピー同値（同じホモトピー型をもつこと）は，位相空間の全体に同値関係を定めることを示せ．

38 問 **23** の記号を用いる．

(1) U で $s=0$，V で $t=0$ で定まる部分集合の和集合を A とする．A は M の変位レトラクトであることを示せ．

(2) 開いたメビウスの帯（境界を除いたもの）のド・ラムコホモロジー群を求めよ．

(3) M 上の閉 1 形式で，完全ではないものを 1 つ求めよ．

39 $\boldsymbol{R}^2$ から 2 点 O，$A(1,0)$ を除いた開集合を U とする．

(1) $U_0=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{O\}\mid x<1\}$，$U_1=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{A\}\mid x>0\}$ とするとき，U_0，U_1 は S^1 とホモトピー同値であることを示せ．

(2) $H^p_{DR}(U)$（$p=0,1,\ldots$）を計算せよ．また，生成元を代表する閉形式を 1 つずつ求めよ．

40 閉円板と $\boldsymbol{R}^2$ は，同相ではないが，ホモトピー同値であることを示せ．

41 $\boldsymbol{R}^{n+1}$（$n\geq 2$）において，$N(0,\ldots,0,1)$，$S(0,\ldots,0,-1)$，$U_0:=S^n\setminus\{N\}$，$U_1:=S^n\setminus\{S\}$ とする．

(1) $U_0\cap U_1$ は S^{n-1} とホモトピー同値であることを示せ．

(2) 次を示せ．

$$H^p_{DR}(S^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{R} & (p=0,\,n)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

42 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の微分形式 $\omega=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_i dx_1\wedge\cdots\widehat{dx_i}\cdots\wedge dx_{n+1}$，$\nu=x_1dx_1+\cdots+x_{n+1}dx_{n+1}$ を考える．

(1) ν は完全であることを示せ．

(2) $\nu\wedge\omega$ を計算せよ．

(3) $\omega|_{S^n}$ は S^n の向き付けを与えることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{S^n}\omega|_{S^n}$ を計算せよ．

(5) $\omega|_{S^n}$ の類は $H^n_{DR}(S^n)$ の基底になることを示せ．

43 可微分写像 $f:S^3\to S^2$ と，S^2 上の 2 形式 α について次の問いに答えよ．

(1) S^3 上の 2 形式 $f^*\alpha$ は閉であることを示せ．

(2) $f^*\alpha$ は完全であることを示せ．

(3) $f^*\alpha=d\omega=d\omega'$ となる S^3 上の 1 形式 ω，ω' を任意に選ぶ．
$\omega-\omega'$ および $\omega\wedge d\omega-\omega'\wedge d\omega'$ は完全であることを示せ．

(4) 積分

$$\int_{S^3}\omega\wedge d\omega$$

は $f^*\alpha=d\omega$ となる ω の選び方に依らないことを示せ.（以後この積分の値を $H(f,\alpha)$ と書く.）

(5) 可微分写像 $F:S^3\times\boldsymbol{R}\to S^2$ に対し，$F^*\alpha=d\eta$ となる $S^3\times\boldsymbol{R}$ 上の 1 形式 η が存在することを示せ．

(6) $\eta\wedge d\eta$ は閉であることを示せ．

(7) $g:S^3\to S^2$ が f と C^∞ ホモトピックな可微分写像ならば，$H(g,\alpha)=H(f,\alpha)$ であることを示せ．

44 U を $\boldsymbol{R}^3$ の開集合とする．P,Q,R を U 上の C^∞ 級関数として，U 上の 1 形式 $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) $\omega\wedge d\omega$ を計算せよ．

(2) U 上至るところ 0 でない関数 f が存在して $f\omega$ が完全になるとき，次を示せ．

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$