平成 17 年度 代数学特別講義 I・代数学概論（小林）

レポート問題 その 1

以下の問題、あるいは講義に関連する問題、講義中に省略した部分について解き、7 月 22 日までに提出せよ。

1. 凸集合の内部・閉包も凸であることを示せ。

2. S を含む凸閉集合の共通部分を S の**凸閉包** (closed convex hull) という。凸閉包は一意的に存在し、$\operatorname{conv} S$ の閉包と一致することを示せ。また、$\operatorname{conv} \bar{S}$ とは必ずしも一致しないことを示せ。

3. 次のそれぞれの反例を挙げよ。

(1) S が閉でも $\operatorname{conv} S$ が閉とは限らない。
(2) S が有界でも $\operatorname{conv} S$ が閉とは限らない。

4. 閉凸集合に対し、有界であることと半直線を含まないことは同値であることを示せ。

以下の 2 問では、アフィン空間において $x_0, \dots, x_n$ は独立とし、$x_{n+i} = x_{i-1}$ $(i = 0, 1, \dots)$ と置く。y_i を直線 $x_i x_{i+1}$ 上の x_i, x_{i+1} とは異なる点とし、$\overrightarrow{y_i x_{i+1}} = k_i \overrightarrow{x_i y_i}$ とおく。n 点 $y_i, x_j (\forall j \neq i, i+1)$ のアフィン包を σ_i とおく。

5. （Menelaos の定理）$y_0, \dots, y_n$ が従属 $\iff \prod k_i = (-1)^{n+1}$.

6. （Ceva の定理）$\sigma_0, \dots, \sigma_n$ が 1 点を共有する $\iff \prod k_i = 1$

7. （Radon の定理）S を $\mathbb{R}^d$ の $(d+2)$ 点からなる部分集合とするとき、分割 $S = S_1 \coprod S_2$ で $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$ となるものが存在する。

8. （分離補題）凸集合 S, S' は、S' が有界で、$\bar{S} \cap \bar{S}' = \emptyset$ を満たすとする。このとき、ある超平面 $H(u, a)$ が存在して、S と S' を狭義に分ける。すなわち、$S \subset H^+(u, a)$ かつ $S' \subset H^-(u, a)$.

ただし、$u \in V^* \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
H(u; a) &= \{v \in V | \langle u, v \rangle = a\} \\
H^+(u; a) &= \{v \in V | \langle u, v \rangle > a\} \\
H^-(u; a) &= \{v \in V | \langle u, v \rangle < a\}
\end{aligned}
$$

と定める。

9. S_i $(i = 1, 2)$ を閉凸錐とするとき次が成り立つ。

(1) $(S_1 + S_2)^\vee = S_1^\vee \cap S_2^\vee$,
(2) $(S_1 \cap S_2)^\vee = S_1^\vee + S_2^\vee$.

10. S_i を原点を含む凸集合とするとき次が成り立つ。

(1) $(\operatorname{conv}(S_1 \cup S_2))^\circ = S_1^\circ \cap S_2^\circ$,
(2) $(S_1 \cap S_2)^\circ = \operatorname{conv}(S_1^\circ \cup S_2^\circ)$.

平成 17 年度 代数学特別講義 I・代数学概論（小林）

レポート問題 その 2

11. 付値判定法を用いて、扇の分割に対応する射は固有であることを示せ。

以下では r を 2 以上の整数とする。

12. $\frac{1}{r}(1,1)$ の特異点解消を与えよ。（分割したあとの錐は単体的錐で、生成元として基底の一部が取れることを示せ）

13. $\frac{1}{8}(1,2,5)$ の特異点解消を与えよ。

14. 曲面 $\frac{1}{3}(1,1)$ は $\mathbb{C}^4=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\}$ 内で 2 本の方程式では定義できないことを、イデアル $(x_0x_2-x_1^2, x_0x_3-x_1x_2, x_1x_3-x_2^2)$ が 2 つ以下の元では生成されないことにより示せ。

15. $\frac{1}{r}(1,r-1)$ の $\mathbb{C}^N$ への一つの埋め込みと、特異点解消を与えよ。

16. 講義で示した $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{C}^4 | x_1x_3=x_2x_4\}$ の 3 つの特異点解消の例外集合（この場合、原点の逆像）の関係を記述せよ。

17. $\frac{1}{r}(1,1,1)$ について、

(1) $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を生成元の一つとする錐を 3 つ作ることで特異点解消ができることを示せ。

(2) 原点の逆像は $\mathbb{P}^2$ と同形であることを示せ。

18. a, b は $r-1$ 以下の正整数とし、

$$N=\mathbb{Z}^3+\mathbb{Z}\,\frac{1}{r}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix},\ \sigma=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in N_{\mathbb{R}}\ \middle|\ \forall i\ v_i\geq 0\right\}$$

とする。

(1) 加群の同形 $\varphi\colon N\cong\mathbb{Z}^3$ を一つ構成し、$\varphi(\sigma)$ を求めよ。

(2) $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}$ を通る 3 つの錐で分割したとき特異点解消になるための a,b の条件を求めよ。

19. 次の特異点の特異点解消を錐の分割により与えよ。

$$\sigma=\mathrm{cone}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

20. 次の特異点の特異点解消を求めよ。（巡回ではない有限 Abel 群による商特異点）

$$N=\mathbb{Z}^3+\mathbb{Z}\,\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mathbb{Z}\,\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\sigma=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in N_{\mathbb{R}}\ \middle|\ \forall i\ v_i\geq 0\right\}$$