

## レポート問題

1.  $n$  個の球から  $r$  個を抜き出して円順列・数珠（ネックレス）を作る場合の数を求めよ。尚、数珠はひっくり返せることに注意せよ。

2.  $\sum_{x=1}^m x^t$  について、 $t = 4, 5$  など低次のものに対して公式を計算せよ。また、一般に、 $m^{t+1}/(t+1) + m^t/2 + (\text{低次})$  となることを示せ。

3. Catalan 数にまつわることについて述べよ。例えば、Catalan 数  $C_n$  と、凸多角形の三角形分割の方法の数  $D_{n+2}$  が等しいことを直接関係づけよ。

4.

$$\begin{cases} u + v + w + x + y = 17 \\ 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 5 \\ 3 \leq w, x, y \leq 7 \end{cases}$$

の整数解の個数を求めよ（適当に係数を変えて自分で問題を作って解け）。

5. 次を示せ。

Pólya-Szegő の定理.  $I$  を正整数からなる有限集合（有限リスト）とすると次が成り立つ。

$$\max I = \sum_{n \in I} n - \sum_{J \subset I, |J|=2} \min J + \sum_{J \subset I, |J|=3} \min J - \dots - (-1)^{|I|} \min I$$

## レポート問題の解答例

1. 円順列に参加する球の選び方は  $\binom{n}{r}$  通り、それぞれについて円に並べる並べ方は  $(r-1)!$  通りだから、 $(r-1)!\binom{n}{r} = n!/(n-r)!r$  通り。

(別解)  $r$  個の球を順に並べる並べ方は  ${}_nP_r$  通りで、 $r$  回の回転対称性があるから、 ${}_nP_r/r$  通り。

次に、数珠の場合を考える。

$r \leq 2$  であればひっくり返すことに意味はないから円順列の場合と同じで、 $r = 1$  なら  $n$  通り、 $r = 2$  なら  $n(n-1)/2$  通り。

$r \geq 3$  の場合、ひっくり返すと順序が入れ替わるので、 $n!/2(n-r)!r$  通り。

2. (テキスト 101–104 ページ参照)。前半の答だけ書くと、4 乗和が

$$\frac{1}{30}m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1) = \frac{m^5}{5} + \frac{m^4}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m}{30},$$

5 乗和が

$$\frac{1}{12}m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1) = \frac{m^6}{6} + \frac{m^5}{2} + \frac{5m^4}{12} - \frac{m^2}{12}.$$

3. (略解)  $(n+2)$  角形の三角形分割と、 $n \times n$  の道がある格子を右に進んだ数が上に進んだ数を下まわらないように最短経路で左下  $(0,0)$  から右上  $(n,n)$  まで通る道  $L$  との間の一対一対応を以下のようにして帰納的に作ることができる。

$(n+2)$  角形の頂点を右回りに  $P, P_0, \dots, P_n$  とする。(i)  $L$  が対角線上の格子点を始点と終点以外では通らない時、 $P_0$  と  $P_n$  を線分で結んで三角形  $\triangle PP_0P_n$  を作り、残りの  $(n+1)$  角形を  $(1,0)$  から  $(n,n-1)$  への経路に従って分割する(多角形の頂点の番号は添字を 1 ずつ減らし  $P_{-1}$  を  $P$  とする)。(ii)  $L$  が対角線上の格子点  $(k,k)$  を通る時、 $P$  と  $P_k$  を線分で結び、できた小多角形を帰納的に分割する。

4. 係数は各人で異なる。PIE を用いる。この例では講義で述べたように、

$${}_5H_6 - ({}_5H_4 + 4{}_5H_1) = {}_{10}C_6 - ({}_8C_4 + 4{}_5C_1) = {}_{10}C_4 - (70 + 20) = 210 - 90 = 120 \text{ 個}.$$

5.  $I$  の元  $n$  に対し、 $\{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq n\}$  を考えて包除原理を用いる。

離散数学入門 試験 (平成 15 年 7 月 22 日 3 限)

全 4 問。自筆ノートのみ持込可。答に至る過程をしっかりと書くこと。最高 60 点として (それ以上は打ち切り) 採点し、レポート (最高 40 点) を加算して評価する。

1. 次の条件を満たす整数の組  $(x, y, z, w)$  の個数を求めよ。(15 点)

$$\begin{cases} x + y + z + w = 16 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ 2 \leq z \leq 6 \\ 3 \leq w \leq 7 \end{cases}$$

2. 図のように放射状に中心角  $\pi/4$  の 8 つの扇形に区切られた円盤がある。  $n$  色を用いて 8 つの部分塗り分ける。ただし、1 つの部分は 1 つの色からなり、回転して重なる塗り分けは同じであるとする。なお、塗るのは表だけで、裏返しはしない。

(1) 塗り分け方は何通りあるか。  $n$  の式で表わせ。(15 点)

(2)  $n$  色のうちちょうど 3 色を使って塗り分ける方法は何通りあるか。(15 点)

(難しければ  $n = 3$  としてもよい。その場合、点数は 10+10 点。)

3. 次の 2 部グラフの最大マッチングを一つ構成せよ。(10 点)

4. 次のネットワークフローにおいて、各辺にどれだけ流せば流れが最大になるか図示せよ。なぜ最大流であるか理由も示せ。(20点)

入口

出口

以下は計算用

## 離散数学入門 特別問題 (大学院生用)

5. 正の整数  $n$  に対し、 $n$  をいくつかの相異なる正の整数の和に分割する方法の数を  $a_n$  とし、 $n$  をいくつかの (重複してもよい) 正の奇数の和に分割する方法の数を  $b_n$  とする。

例えば、 $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1$  より  $a_6 = 4$  であり、 $6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  より  $b_6 = 4$  である (注意: 6 自身は偶数であるから、何も分割しないものは  $a_6$  では含まれるが  $b_6$  では含まれない)。

- (1)  $\{a_n\}$  の母関数  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  を積の形で求めよ。
- (2)  $\{b_n\}$  の母関数  $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  を積の形で求めよ。
- (3) 式変形により  $a_n = b_n$  を示せ。

## 解答例 (略解)

1. 与えられた方程式を、 $x' = x - 1$  などとして変数が 0 以上となるように直すと、解  $(x, y, z, w)$  は次の方程式の解  $(x', y', z', w')$  と一対一に対応する。

$$\begin{cases} x' + y' + z' + w' = 9 \\ 0 \leq x' \leq 2 \\ 0 \leq y' \leq 4 \\ 0 \leq z' \leq 4 \\ 0 \leq w' \leq 4 \end{cases}$$

非負整数解の全体から、 $x' \geq 3, y' \geq 5, z' \geq 5, w' \geq 5$  が 1 つでも成り立つ場合を PIE を用いて除くと、

$${}_4H_9 - ({}_4H_6 + {}_3H_4) + {}_3H_1 = {}_{12}C_3 - {}_9C_3 - {}_7C_3 + {}_4C_1 = 220 - 84 - 105 + 12 = 43.$$

2.

- (1) Pólya の定理を用いる。回転は、回転角で分けると  $0$  (1 個)  $\lambda$   $\pi$  (1 個)  $\lambda$   $\pm\pi/2$  (2 個)、 $\pm\pi/4, \pm 3\pi/4$  (4 個) の 8 個であり、それぞれで固定される塗り分けの配置は順に  $n^8, n^4, n^2, n$  通りずつあるから、

$$f(n) = \frac{1}{8}(n^8 + n^4 + 2n^2 + 4n) = \frac{n(n+1)}{8}(n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + 2n^2 - 2n + 4)$$

通り (特に  $f(3) = 834$  である)。

- (2)  $n$  個から 3 色を選び、その 3 色を用いて塗り分ける方法は、 $\binom{n}{3} f(3)$  通り。そのうち、2 色以下で塗り分けている場合を除くと、PIE より ( $\alpha_i : i$  色目を使っていない ( $i = 1, 2, 3$ ) とする)

$$\binom{n}{3} \{f(3) - 3f(2) + 3f(1)\} = \frac{243}{2}n(n-1)(n-2) \text{ 通り}$$

(特に  $n = 3$  のとき 729 通り)。

3. A-j, B-c, C-a, D-b, E-e, F-d, G-k, H-h, I-g, J-f, K-i は完全マッチングであるから最大マッチングとなる。

4. {入口, A, C} と {B, D, 出口} に分割した時の切断は  $12 + 5 + 1 + 10 = 28$  で、実際に、(切断以外の場所で) 入口 A : 16, A C : 11, B D : 17, D 出口 : 18 と流すと 28 の流れができるので、最大流最小切断定理から、これが最大流である。

5.

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

$$g(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots$$

である。変形すると

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$$