

幾何学 A 演習

テキストの問題も対象とする。問題文を節約するため大問にまとめた問題もあるが、(1), (2), ... を別の人が解答して構わない。

多様体の定義

テキストの問題：6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5

1. 次の集合 M は、 \mathbb{R}^2 の部分空間として位相多様体になるか？

- (1) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$
- (2) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (3) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$
- (4) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- (5) $M = \{(t^2, t) \mid t \geq 0\} \cup \{(-t^2, -t) \mid t \geq 0\}$
- (6) $M = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

2. $m \times n$ 次実行列の全体 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は成分を座標関数とすることにより \mathbb{R}^{mn} と同一視して mn 次元多様体と思う。

正方行列の場合、行列式は $M_n(\mathbb{R})$ 上の微分可能な関数になることに注意し、以下の $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間はそれぞれ位相多様体になることを示せ。

- (1) $GL(n, \mathbb{R})$ (n^2 次元)
- (2) $SL(n, \mathbb{R})$ ($(n^2 - 1)$ 次元)

3. 次の集合 M は、 \mathbb{R}^3 の部分空間として位相多様体になるか？また、できれば概形を書いてみよ。

- (1) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$
- (2) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

4. 2枚の平面 \mathbb{R}^2 を用意し、 P_1, P_2 とする。直和 $P_1 \amalg P_2$ において、原点を中心とする単位円の外側 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ で P_1 と P_2 で対応する点を同一視して貼り合わせたものを M とする。 M には、写像 $P_1 \amalg P_2 \rightarrow M$ によって商位相が入る。

M は位相多様体になるか？

5. \mathbb{R}^2 の部分空間 $(-1, 1) \times [-1, 1]$ において、点 $(x, -1)$ と点 $(-x, 1)$ を $\forall x \in (-1, 1)$ に対してそれぞれ同一視することにより得られる商空間を M とする。

$$U_0 := \{(x, t) \in M \mid -1 < t < 1\}, \quad U_1 := \{(x, t) \in M \mid t \neq 0\},$$

$$U'_0 = U'_1 = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$$

とし、写像 $\varphi_i: U_i \rightarrow U'_i$ を

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 \ni (x, t) &\mapsto (x, t) \in U'_0 \\ \varphi_1: U_1 \ni (x, t) &\mapsto \begin{cases} (x, t+1) \in U'_1 & (-1 \leq t < 0) \\ (-x, t-1) \in U'_1 & (0 < t \leq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

と定める。

- (1) M は Hausdorff 空間であることを示せ。
- (2) $U_0 \cup U_1 = M$ であり φ_i は同相写像であることを示せ。
- (3) $S = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,1}$ は M の C^∞ 級座標近傍系になり M に 2次元 C^∞ 多様体としての構造を定めることを示せ。

6. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $I = [-1, 1]$ の直積空間 $S^1 \times I$ において、 $((-x, y), -1)$ と $((x, y), 1)$ ($(x, y) \in S^1$) を同一視して得られる商空間を M とする。

$$\begin{aligned} U_{00} &= \{((x, y), t) \in M \mid y < 1, -1 < t < 1\} \\ U_{10} &= \{((x, y), t) \in M \mid y > -1, -1 < t < 1\} \\ U_{01} &= \{((x, y), t) \in M \mid y < 1, t \neq 0\} \\ U_{11} &= \{((x, y), t) \in M \mid y > -1, t \neq 0\} \\ U'_{ij} &= \mathbb{R} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2 \quad (i, j = 0, 1) \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned} \varphi_{00}: U_{00} \ni ((x, y), t) &\mapsto \left(\frac{x}{1-y}, t \right) \in U'_{00} \\ \varphi_{10}: U_{10} \ni ((x, y), t) &\mapsto \left(\frac{x}{1+y}, t \right) \in U'_{10} \\ \varphi_{01}: U_{01} \ni ((x, y), t) &\mapsto \left(\frac{x}{1-y}, t+1 \right) \in U'_{01} \quad (-1 \leq t < 0) \\ &\quad \left(\frac{-x}{1-y}, t-1 \right) \in U'_{01} \quad (0 < t \leq 1) \\ \varphi_{11}: U_{11} \ni ((x, y), t) &\mapsto \left(\frac{x}{1+y}, t+1 \right) \in U'_{11} \quad (-1 \leq t < 0) \\ &\quad \left(\frac{-x}{1+y}, t-1 \right) \in U'_{11} \quad (0 < t \leq 1) \end{aligned}$$

と定める。

- (1) $\{(U_{ij}, \varphi_{ij})\}_{i,j=0,1}$ は M の座標近傍系になることを示せ。
- (2) さらに C^∞ 級座標近傍系であることを示せ。

テキストの問題 : 7.1, 7.2, 7.3, 7.4

7. M, M', N, N' を C^r 級多様体とする。 C^s 級写像 $f: M \rightarrow M', g: N \rightarrow N'$ が与えられている時、 $f \times g: M \times N \rightarrow M' \times N'$ は積多様体間の C^s 級写像になることを示せ。ただし、 $0 \leq s \leq r \leq \infty$ とする。

8. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ により $T^n = (S^1)^n \subset (\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$ と思う。 \mathbb{R}^n の点 $P(t_1, \dots, t_n)$ に \mathbb{R}^{2n} の点 $Q(\cos t_1, \sin t_1, \dots, \cos t_n, \sin t_n)$ を対応させる写像を π とする。

π は \mathbb{R}^n から T^n への上への C^∞ 級写像であることを示せ。また、逆像 $\pi^{-1}(Q)$ を求めよ。

9. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を考える。

- (1) $P = (x, y) \in S^1$ のとき $Q = (x^2 - y^2, 2xy)$ とすると、 $Q \in S^1$ であることを示せ。また、同じ Q を与える $P \in S^1$ は何個あるか。
- (2) 点 P に点 Q を対応させる写像は S^1 から S^1 への全射 C^∞ 級写像であることを示せ。

1(3) (前回の提出問題) まず、くどいほど丁寧な解答を示す。

M 上の点 (x, y) は $xy = 1$ を満たすから $x \neq 0, y = 1/x$ となる。 xy 平面から x 軸への射影 $\pi: (x, y) \mapsto x$ を M に制限すると、 π は M 全体 (これも M の開集合である) から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (これは \mathbb{R} の開集合である) への写像になる。 $\psi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow M$ を $x \mapsto (x, 1/x)$ で与えると、 $\psi \circ \pi(x, y) = \psi(x) = (x, 1/x) = (x, y), \pi \circ \psi(x) = \pi(x, 1/x) = x$ (合成が恒等写像) が成り立つから、 ψ は π の逆写像である。すなわち、 $\psi = \pi^{-1}$ である。逆写像が存在することは全単射であることと同値であるから、 π は全単射である。

(全射・単射であることをもし一つ一つ確認するなら、例えば次のようにする。任意の $x \neq 0$ に対して、 $y = 1/x$ とおくと $(x, 1/x) \in M$ であって $\pi(x, 1/x) = x$ であるから π は全射であり、 $(x, y), (x', y')$ を M の 2 点として、 π の像が等しいとすると、 $x = x'$ であるから $xy = 1$ を満たすことから $y = 1/x = 1/x' = y'$ したがって、 $(x, y) = (x', y')$ であるので、 π は単射でもある。)

π は射影であるから連続写像である (x は 2 変数 (x, y) の関数として連続である)、 $x, 1/x$ は x に関して連続な関数であるから、 π^{-1} も連続写像である。よって、 π は M 全体から \mathbb{R} のある開集合への同相写像であるから、 M は一枚の座標近傍 (M, π) で覆われる位相多様体になっている。

普通の解答としては、「 x 軸への射影 $\pi: (x, y) \mapsto x$ は M から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への連続写像であり、逆写像 $x \mapsto (x, 1/x)$ が存在して連続だから、 M は 1 枚の座標近傍で覆われる位相多様体である。」くらいでよい。もちろん、理解していることが前提である。

10. $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ とする。また、立体射影により S^2 と $\hat{\mathbb{C}}$ を同一視する。

- (1) \mathbb{C} の実部と虚部を用いて $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ と思うことにより $M = S^3$ であることを示せ。また、 $0 \notin M$ であることを示せ。
- (2) M の点 (z, w) に $z/w \in \hat{\mathbb{C}}$ を対応させる写像を f とする。ただし、 $z \neq 0, w = 0$ のとき $z/w = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$ とする。 S^2 の立体射影による 2 枚の座標近傍で z/w に対応する \mathbb{R}^2 の点の座標を求めよ。
- (3) M の適当な座標近傍を取って f を局所的に座標で表わし、 f は C^∞ 級写像であることを示せ。
- (4) z/w に対応する S^2 の点 (x_1, x_2, x_3) を z, w で表わせ。(ここでは S^2 を定義通り \mathbb{R}^3 の部分集合と知っている。) [テキスト問 11.4]
- (5) f は全射であることを示せ。
- (6) $f(z, w) = \alpha$ とするとき、 $f^{-1}(\alpha) = \{(tz, tw) \mid t \in \mathbb{C}, |t| = 1\}$ であることを示し、 $f^{-1}(\alpha)$ は S^1 と同相であることを示せ。

11. $\hat{\mathbb{C}}$ と同様に四元数体 \mathbb{H} の一点コンパクト化 $\hat{\mathbb{H}}$ に S^4 と同形な C^∞ 級多様体としての構造が入ることを示し、前問と同様の C^∞ 級写像 $f: S^7 \rightarrow S^4$ を構成せよ。また、 f は全射であることと、一点の逆像が S^3 と同相であることを示せ。

ヒント： \mathbb{H} は非可換なので、 z/w の代りに $w\alpha = z$ となる α を取る。

12. \mathbb{R} の開区間について、次の問いに答えよ。

- (1) 開区間 $(0, 1)$ は \mathbb{R} と C^∞ 級微分同相であることを示せ。
- (2) \mathbb{R} の (空でない) 開区間は全て互いに C^∞ 級微分同相であることを示せ。

ヒント： \mathbb{R} はそれ自身への恒等写像が座標関数である C^∞ 級多様体である。開区間は \mathbb{R} の開部分集合だからやはり自明な座標関数で C^∞ 多様体とみなしている。(1) $(0, 1)$ から \mathbb{R} への全単射 f で、 f も f^{-1} も C^∞ 級であるものを構成すればよい。(2) \mathbb{R} の開区間は、 (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) という形をしている。

13. 正の整数 m を固定する。 \mathbb{R}^m の (空でない) 開区間は全て互いに C^∞ 級微分同相であることを示せ。ただし、 \mathbb{R}^m の開区間とは、各成分の \mathbb{R} の開区間の直積 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)$ ($-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$) である。

14. \mathbb{R} から \mathbb{R} への同相だが C^1 級微分同相でない C^1 級写像の例を与えよ。

15. $S^1 \times (0, 1)$ と、

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x^2 + y^2 < R\} \quad (0 < r < R)$$

とは C^∞ 級微分同相であることを示せ。

16. \mathbb{R}^2 の部分集合

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

は共に開部分集合なので開部分多様体になる。

M_1 と M_2 は C^∞ 級微分同相であるか?

17. 任意の離散位相空間 X は 0 次元位相多様体になることを示せ。ただし位相多様体の定義に第二可算公理は仮定しない。

また、密着位相空間 X が位相多様体になるなら、 X は一点からなることを示せ。

テキストの問題：8.1, 8.2 (i) (ii), 8.3

18. \mathbb{R}^3 の第一象限において、直交座標 (x, y, z) と極座標 (r, θ, φ) を考える。ただし、

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} (x > 0, y > 0, z > 0) \\ (r > 0, 0 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < \pi/2) \end{matrix}$$

とする。

(1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) J$$

を満たす行列 J を r, θ, φ で表わせ。

(2) $\det J$ を求めよ。

(3) J^{-1} を x, y, z で表わせ。

19. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の複素座標を $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とし、(実) 2次元多様体としての局所座標 (x, y) を取る。

(1) ある $P \in \mathbb{C}$ の近傍 U で定義された C^1 級関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 $\partial f / \partial z$ を $\partial f / \partial x$ と $\partial f / \partial y$ で表わせ。

(2) $\partial / \partial x, \partial / \partial y$ で $\partial / \partial z, \partial / \partial \bar{z}$ を表わし、次を満たす定数行列 $A \in M_2(\mathbb{C})$ を計算せよ。

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) A$$

また、 A^{-1} を計算せよ。

テキストの問題：

- 9.1 (i) (ii) (iii),
 9.2,
 9.3 (i) (ii) (iii) (iv),
 9.4,
 10.1,
 11.1,
 11.2,
 11.3

20. 9(2) の $(1, 0)$ における微分を計算せよ。

21. 10(3) の微分を計算せよ。

22. $f: M \rightarrow N$ を C^r 多様体間の C^r 級写像とする。全ての点 $P \in M$ で $(df)_P = 0$ であれば、 f は局所定値写像であることを示せ。

できれば、さらに、 M が連結のとき、 f が定値写像になることを示せ。

23. $k \leq 2$, a_1, \dots, a_n を k と互いに素な n 個の整数とする。 \mathbb{C}^{n+1} の単位球面

$$S^{2n+1} = \{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \}$$

を考える。多様体としての構造は標準的な極大座標近傍系とする。 $\zeta = \exp(2\pi i/k)$ として、 \mathbb{C}^{n+1} の線形変換 γ を

$$\gamma: (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\zeta z_0, \zeta^{a_1} z_1, \dots, \zeta^{a_n} z_n)$$

で与える。

- (1) $\gamma(S^{2n+1}) = S^{2n+1}$ であり、 S^{2n+1} 上の γ の作用に固定点はないことを示せ。
- (2) 以後、 γ を S^{2n+1} 上に制限して考えることにする。 γ は S^{2n+1} の位数 k の自己微分同相写像であることを示せ。
- (3) 各点 $P \in S^{2n+1}$ に対して、 P を含む座標近傍 U で $\gamma^i(U) \cap U = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) となるものが存在することを示せ。
- (4) 商空間を $L = L(k; a_1, \dots, a_n) := S^{2n+1}/\langle \gamma \rangle$ とおく。標準的な写像を $\pi: S^{2n+1} \rightarrow L$ とする。商位相であるから、 L の部分集合 V が開集合であるのは、 $\pi^{-1}(V)$ が S^{2n+1} の開集合であることと同値である。
 L は $(2n+1)$ 次元微分可能多様体であることを示せ。

24. Ω を高々2級の順序数（つまり高々可算集合の整列順序に対応する順序数）とする。

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, \dots, \omega^2, \dots\}$$

Ω 自身は非可算集合である。各 $0 \neq \alpha \in \Omega$ に対して半開区間 $I_\alpha = [0, 1)$ が与えられているとし、 $I_0 = (0, 1)$ とする。その共通部分のない和集合 $L^+ = \bigcup_{\alpha \in \Omega} I_\alpha$ に自然な順序を入れて全順序集合とし、それを利用して開集合の基を開区間全体として定めて位相空間にする。

L^+ を二つ用意し、それぞれの I_0 で逆向きに貼り合わせたものを L とする。

L^+ および L はパラコンパクトではない1次元連結位相多様体になることを示せ。

25. 長い半直線 L^+ と長い直線 L は同相でないことを示せ。

26. M を1次元連結位相多様体とする。次を示せ。

- (1) M がコンパクトならば、 M は S^1 に同相である。
- (2) M がパラコンパクトでありコンパクトでなければ、 M は \mathbb{R}^1 に同相である。

27. $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ の 2 点 $P(x_0, \dots, x_m), Q(y_0, \dots, y_m)$ に対し、ある $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して、 $y_i = \lambda x_i$ と一斉に書けるときの、 $P \sim Q$ と定める。

\sim は同値関係であることを示せ。

28. 位相多様体 $\mathbb{R}P^m$ は C^∞ 級多様体になることを示せ。

29. S^m において、開集合 $U_0^+ := \{x_0 > 0\}$ を考える。原点を通る直線と U_0^+ 上の点 P を結ぶ直線は、超平面 $x_0 = 1$ と一点で交わる。その点を Q とする。超平面を \mathbb{R}^m と同一視し、 P に Q を対応させる写像を $f: U_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ とする。

- (1) 対応する $(U_0^+)' \subset \mathbb{R}^m$ から \mathbb{R}^m への写像を計算することにより、 f は開部分多様体 U_0^+ と \mathbb{R}^m の間の C^∞ 級微分同相写像であることを示せ。
- (2) 標準的な 2 : 1 写像 $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ により、 U_0^+ と $\mathbb{R}P^m$ の開集合 U_0 は C^∞ 級微分同相であることを示せ。
- (3) $\mathbb{R}P^m$ における U_0 の補集合 H_0 を無限遠超平面という。 H_0 は $\mathbb{R}P^{m-1}$ と C^∞ 級微分同相であることを示せ。

30. $\pi: \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^m$ において、 \mathbb{R}^{m+1} の $(k+1)$ 次元線形部分空間 V の (原点を除いた) 像 $V' := \pi(V \setminus \{0\})$ を、 $\mathbb{R}P^m$ 内の k 次元 (線形) 空間という。 $k = 0, 1, 2$ のときは、それぞれ点・直線・平面と呼ぶ。

- (1) \mathbb{P}^2 において、異なる 2 直線はちょうど 1 点で交わることを示せ。
- (2) \mathbb{P}^3 において、3 個の互いに相異なる平面はちょうど 1 点で交わるとは限らないことを示せ。

31. \mathbb{R}^{m+1} の座標を (X_0, \dots, X_m) とし、 $(X_0 : \dots : X_m)$ を $\mathbb{P}^m = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ の同次座標あるいは斉次座標と呼ぶ。

- (1) 同次座標の同次多項式 $f(X_0, \dots, X_m)$ を取る。 \mathbb{P}^m の点が $f = 0$ を満たすかどうかは、点の同次座標の代表元の取り方によらないことを示せ。
- (2) $d, n > 0$ として、同次座標の d 次同次多項式を $(n+1)$ 個取り、それらを $f_i(X_0, \dots, X_m)$ ($0 \leq i \leq n$) とする。少なくとも一つの f_i について 0 にならないとき、 $(f_0 : \dots : f_n)$ は \mathbb{P}^n の点を定めることを示せ。
- (3) f_i を X_0, \dots, X_m の d 次単項式の全体とすると、それらを並べてできる写像 f は \mathbb{P}^m から \mathbb{P}^n への C^∞ 級写像であることを示せ。ただし、 $n = m+dC_d - 1$ である。

(Hint: 非同次座標に書き換えて表示せよ。)

- (4) f は単射であることを示せ。
- (5) 各点 $P \in \mathbb{P}^m$ で $(df)_P$ は単射であることを示せ。

32. \mathbb{P}^3 の同次座標 $(X_0 : \dots : X_3)$ に関して、同次 2 次方程式 $X_0X_3 - X_1X_2 = 0$ を満たす点からなる部分空間を M とする。

- (1) M は C^∞ 級多様体になることを示せ。
- (2) M の点 $(X_0 : \dots : X_3)$ に $(X_0 : X_1) \times (X_0 : X_2) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を対応させる写像を f とする。ただし、 $X_0 = X_1 = 0$ のときは $(X_0 : X_1)$ の代わりに $(X_2 : X_3)$ を用い、 $X_0 = X_2 = 0$ のときは $(X_0 : X_2)$ の代わりに $(X_1 : X_3)$ を用いる。非同次座標で f を表わすことにより、 f は C^∞ 級写像であることを示せ。
- (3) f は C^∞ 級微分同相写像であることを示せ。

33. $1 \leq r \leq \infty$ とする。コンパクトな C^r 級多様体 M からの C^r 級関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次の問いに答えよ。ただし、 M の次元を m とする。

- (1) f に最大値が存在することを示せ。
- (2) $(df)_P = 0$ となる点 $P \in M$ が存在することを示せ。
- (3) M から \mathbb{R}^m へのはめ込みは存在しないことを示せ。

34. m 次元トーラス T^m (S^1 の m 個の積多様体) は \mathbb{R}^{m+1} に C^∞ 級写像で埋め込めることを示せ。

35. $r > 0$ として、 C^r 級多様体 M, M' と M の C^r 級部分多様体 N を考える。 M からの C^r 級写像 $f: M \rightarrow M'$ を N に制限した $f|_N: N \rightarrow M'$ は、 N からの C^r 級写像であることを示せ。

テキストの問題：(12.6 は 33 の特別な例なので除外する)

12.1

12.2

12.3

12.4

12.5

12.7

12.8

36. n 次実対称行列の全体を $S_n(\mathbb{R})$ 、 n 次実交代行列の全体を $A_n(\mathbb{R})$ で表わすことにする。

(1) \mathbb{R}^n の超平面

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\} \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

は \mathbb{R}^n の部分多様体であることを示せ。

- (2) Euclid 空間 \mathbb{R}^n の中で、座標 (x_1, \dots, x_n) の連立一次方程式で定まる空でない部分空間は部分多様体になることを示せ。
- (3) $S_n(\mathbb{R}), A_n(\mathbb{R})$ はそれぞれ $M_n(\mathbb{R})$ の $n(n+1)/2$ 次元、 $n(n-1)/2$ 次元の部分多様体になることを示せ。

37. $M_n(\mathbb{R}) \ni X \mapsto {}^t X X \in S_n(\mathbb{R})$ という写像 f を考える。

- (1) $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対し ${}^t X X \in S_n(\mathbb{R})$ を確かめよ。
- (2) f は C^∞ 多様体間の C^∞ 級写像であることを示せ。
- (3) 単位行列 E_n はこの写像の正則値であることを示し、 n 次直交行列の全体 $O(n)$ が $n(n-1)/2$ 次元 C^∞ 級多様体になることを証明せよ。
- (4) f は全射か？

38. 1(6) の M を考える。 M は \mathbb{R}^2 の部分空間として位相多様体になった。

- (1) M の位相多様体としての構造を保ったまま C^1 級多様体としてのアトラスを入れることができることを示せ。
- (2) M にどのような C^1 級構造を入れても、 M から \mathbb{R}^2 への自然な包含写像は C^1 級埋め込みになりえないことを示せ。

39. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を 2 以上の自然数の n 個の組とし、

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{\alpha_1} + \dots + z_n^{\alpha_n}$$

$$g(z_1, \dots, z_n) = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n - 1$$

とする。 \mathbb{C}^n の中で $f = g = 0$ (即ち、 $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f = g = 0$) を満たす解集合を $B(\alpha)$ で表わすことにする。

$B(\alpha)$ は $(2n-3)$ 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。

40. \mathbb{R} の開部分多様体 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ は \mathbb{R}^2 に (閉) 部分多様体として埋め込めることを示せ。

テキストの問題：

14.1

14.2

14.3 (i) (ii)

14.4

15.1

15.2

15.3

15.4

15.5 (i) (ii)

15.6

41. r, n を $0 < r \leq n$ を満たす整数とする。 \mathbb{C}^n の複素変数を $z = (z_1, \dots, z_n)$ とすると、その実部 $x_j = \operatorname{Re} z_j$, 虚部 $y_j = \operatorname{Im} z_j$ ($j = 1, \dots, n$) は実 $2n$ 次元多様体としての座標関数を与える。

$u_k(x, y), v_k(x, y)$ ($k = 1, \dots, r$) を変数 $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ に関する C^r 級関数 ($r \geq 1$) とする。複素数値関数 $u_k(x, y) + iv_k(x, y)$ の x_j に $(z_j + \bar{z}_j)/2$, y_j に $(z_j - \bar{z}_j)/2i$ をそれぞれ代入したものを $f_k(z)$ と書く。 $\bar{f}_k(z)$ も同様に定める。

x_j, y_j の複素数値関数 $z_j = x_j + iy_j, \bar{z}_j = x_j - iy_j$ に対し、

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

と定義する (参考: 問 19)。これらは、複素数値関数に対して各点で複素数値を与える作用素である。次を示せ。

(1) 正の整数 m に対して

$$J_m := \begin{pmatrix} I_m & iI_m \\ I_m & -iI_m \end{pmatrix}$$

は複素正則行列であり、

$$\frac{\partial(z_j, \bar{z}_j)}{\partial(x_j, y_j)} = J_1, \quad \frac{\partial(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} = J_n$$

(2) $\partial \bar{f}_k / \partial z_j = \overline{\partial f_k / \partial \bar{z}_j}$, $\partial \bar{f}_k / \partial \bar{z}_j = \overline{\partial f_k / \partial z_j}$ となり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_k, \bar{f}_k)}{\partial(z_j, \bar{z}_j)} J_1 &= J_1 \frac{\partial(u_k, v_k)}{\partial(x_j, y_j)} \\ \frac{\partial(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} &= J_r^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)}{\partial(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} J_n \\ \operatorname{rank} \frac{\partial(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r)}{\partial(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} &= \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)}{\partial(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} \end{aligned}$$

(3)

$$M := \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$$

とする。 M の各点で上の階数が $2r$ に等しい時、 M は (実) $2(n-r)$ 次元の部分 C^r 級多様体である。

(Hint: 写像 $\mathbb{R}^{2n} \ni (x, y) \mapsto (u_1(x, y), \dots, u_r(x, y), v_1(x, y), \dots, v_r(x, y)) \in \mathbb{R}^{2r}$ を考える。)

(4) $\partial f_k / \partial \bar{z}_j = 0$ ($\forall j, \forall k$) のとき

$$\text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)}{\partial(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} = 2 \text{rank} \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}.$$

(5) a_1, \dots, a_n を正の整数として、 $f(z_1, \dots, z_n) = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$ とするとき、 $M = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = 1\}$ は実 $2(n-1)$ 次元の C^∞ 多様体である。

42. ユニタリ群 $U(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = E\}$ は C^∞ 級多様体になることを示し、その次元を求めよ。

43. $U(m)$ は $O(2m)$ の部分群として次のように定めることもできる。

$$U(m) := \{A \in O(2m) \mid AJ = JA\}, \quad \text{ただし } J = \begin{pmatrix} 0_m & -1_m \\ 1_m & 0_m \end{pmatrix}$$

- (1) この定義で $U(m)$ が C^∞ 級多様体になることを示せ。
- (2) 2通りに定義した空間の間に微分同相写像を作れ。

44. ベクトル空間 \mathbb{R}^n の k 次元線形部分空間 V を取る。 V^\perp で標準内積に関する V の直交補空間を表わす。 V と V^\perp の一組の正規直交基底をそれぞれ $v_1, \dots, v_k; w_1, \dots, w_{n-k}$ とする。これらを合わせると \mathbb{R}^n の正規直交基底になるので、並べてできる n 次行列 $P = (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k})$ は直交行列である。次の問いに答えよ。

- (1) \mathbb{R}^n の一次変換 π で、 V 上では恒等変換、 V^\perp 上零写像となるものがただ一つ存在することを示せ。
- (2) (1) で求めた一次変換 π の表現行列を A とすると、 ${}^tA = A$, $A^2 = A$, $\text{rank } A = k$ を満たすことを示せ。

(Hint: $AP = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)$)

- (3) 逆に、 $A \in M_n(\mathbb{R})$ を ${}^tA = A$, $A^2 = A$, $\text{rank } A = k$ を満たす行列として、 A で表わされる \mathbb{R}^n の一次変換を π とする。

$\text{im } \pi$ 上では π は恒等変換、 $(\text{im } \pi)^\perp$ 上では $\pi = 0$ であることを示せ。

(Hint: 対称行列は直交行列で対角化できる)

- (4) 以上より、 V の全体と次の集合との間に全単射ができた。

$$G(k, n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A, A^2 = A, \text{rank } A = k\}.$$

$G(k, n)$ は $k(n-k)$ 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ。

- (5) 直交補空間を考えると $G(k, n) \cong G(n-k, n)$ であるべきである。この微分同相写像が $A \mapsto I - A$ で与えられることを示せ。

45. C^∞ 多様体 G が群でもあり、積多様体 $G \times G$ から G への写像 $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ 、及び G から G への写像 $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ が共に C^∞ 級写像であるとき、 G は Lie 群であるという。

- (1) $GL_n(\mathbb{R})$ は Lie 群であることを示せ。
- (2) $SL_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ は Lie 群であることを示せ。

テキストの問題：

16.1 (i) (ii) (iii) (iv) 16.2 16.3 16.4 18.1 18.2 18.3 19.1 19.2 19.3 19.4 (i)
(ii) 19.5 20.3 20.6

46. \mathbb{R}^2 の座標を (x, y) とする。 C^∞ 級ベクトル場

$$X = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$Y = h(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + k(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

に対し、 $[X, Y] = 0$ となるための条件を求めよ。

47. m 次元 C^r 級多様体 M に対し、 M の n 個の直積空間の部分空間

$$\text{Conf}_n(M) := \{(x_1, \dots, x_n) \in M \times \dots \times M \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$$

を M の n 次配置空間という。 $\text{Conf}_n(M)$ は mn 次元 C^r 級多様体になることを示せ。

48. m 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍 (U, φ) (局所座標を (x_1, \dots, x_m) とする) において、 (C^1 級) 微分形式の外微分 d を、

$$d(f(x_1, \dots, x_m) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

を満たす実線形写像と定める。

(1) φ を p 形式、 φ' を p' 形式とすると、

$$d(\varphi \wedge \varphi') = d\varphi \wedge \varphi' + (-1)^p \varphi \wedge d\varphi'$$

を示せ。

(ヒント： d は線形なので、一つの基底の成分について示せばよい)

(2) $d^2 = 0$ を示せ。

(3) 別の座標近傍 (V, ψ) での局所座標 (y_1, \dots, y_m) における k 形式

$$g(y_1, \dots, y_m) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$$

を、 $U \cap V$ において $dx, \partial y / \partial x$ たちで表わせ。

(4) $dg(y_1, \dots, y_m) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$ を、 x 座標による外微分によって計算し、 d は局所座標の取り方によらないことを示せ。

49. \mathbb{R}^2 において、 1 形式 $\varphi = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ の外微分を計算せよ。

50. \mathbb{R}^3 において、

(1) 関数 $f(x, y, z)$ の外微分を計算せよ。

(2) 1 形式 $\varphi = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ の外微分を計算せよ。

(3) 2 形式 $\eta = f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$ の外微分を計算せよ。