計算論入門・レポート問題

1. Euclid の互除法が各ステップで 2 つの数の最大公約数を保ちつづけることを示せ。

2. セ・リーグ 6 チームの中には、今シーズン互いに対戦した 3 チームがあるか、または互いに一度も対戦していない 3 チームがあることを示せ。

3. $4n+3$ (n は自然数) の形の素数が無限に存在することを証明せよ。（ヒント：背理法。$4n+1$ の形の素数はいくら掛けても … ）

4. べき乗を乗算により評価するための最小ステップ数 $\ell(n)$ ($n \le 16$) を上限・下限に注意して求めよ。

5. n を自然数とし、P をある $n+2$ 変数多項式とする（固定する)。$a_0, a_1, \ldots, a_n, x$ から多項式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + P(a_0, \ldots, a_n, x) x^{n+1}$$

を加減乗算のみで評価するアルゴリズムは、最低 n 回の純乗算ステップを含むことを証明せよ。

ただし、純乗算ステップとは a_i たちや x を少なくとも 1 つ含んだ式同士の掛け算をいう。a_i や x によらない定数を掛ける操作は純乗算ステップとは呼ばない。

6. $\mathrm{dec}(x) = x \ominus 1$ を計算する Turing 機械の状態遷移図を設計せよ。

7. 次の 2 つの条件を満たす 1 テープ Turing 機械で、テープが空白で埋まった初期状態から有限時間内に停止し、停止した時にできるだけ多くの 0 を出力しているものを設計せよ（目安：10 個以上)。ただし、終了状態に達したときにテープヘッドが 0 の左端に来ている必要はない。

a) 内部状態は開始・終了状態を含めて 4 個以下
b) テープ記号は $\{0, B\}$ (B は空白)

8. 標準的な Turing 機械ではテープは左右に無限に延びている。テープの左側が切れていて端がある Turing 機械を考えても、標準的な Turing 機械を模倣できること（の概略）を示せ。

なお、テープヘッドは初期状態で左端にあるとするなど、条件は適当に仮定してよい。

9. 「１７字以内で表わせない最小の自然数」について考えることを述べよ。

10. 命題論理におけるド・モルガンの法則

(1) NOT (P AND Q) = (NOT P) OR (NOT Q)
(2) NOT (P OR Q) = (NOT P) AND (NOT Q)

を論理関数の言葉で証明せよ。もし Venn 図を使うなら、論理関数との関係を説明すること。

11. 命題論理において、2 変数の論理関数は NAND の組み合わせで実現できることを示せ（NOT, AND, OR が NAND で実現できることを示せ)。

12. n 個の自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し、それらの最大値を与える関数 $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ は原始帰納的であることを示せ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

13. $\mathrm{fib}(x)$ を次で定義される関数（Fibonacci 数列）とする。

$$\mathrm{fib}(0) = 0$$
$$\mathrm{fib}(1) = 1$$
$$\mathrm{fib}(x+2) = \mathrm{fib}(x+1) + \mathrm{fib}(x)$$

$\mathrm{fib}(x)$ は原始帰納的であることを示せ。

14. Ackermann 関数 $A(x, y)$ について次を示せ。

(1) $x + y + 1 \leq A(x, y)$
(2) $A(x, y) < A(x, y+1) \leq A(x+1, y)$
(3) 自然数 a, b に対し、$A(a, A(b, y)) < A(c, y)$ を満たす自然数 c がある。
(4) $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が原始帰納的関数ならば、ある自然数 c に対して

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) < A(c, \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \ (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。（但し、空集合の max は 0 とする）
(5) $f(x, y)$ は原始帰納的関数でない

15. 自然数列 $1, 3, 2, 0$ の Gödel 数を求めよ。

16. Gödel 数 $y = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ から様々な文字列操作をする関数を考える。
$\mathrm{length}(y) = n = y$ に含まれる数列の長さ、
$\mathrm{first}(y) = x_1 = y$ に含まれる先頭の数、
$\mathrm{last}(y) = x_n = y$ に含まれる最後の数、
$\mathrm{get}(y, i) = x_i = y$ の i 番めの数、
$\mathrm{put}(y, i, x) = \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_n \rangle = y$ の i 番めに x を挿入した数列の Gödel 数、
$\mathrm{append}(y, x) = \langle x_1, \ldots, x_n, x \rangle =$ 最後に x を追加した数列の Gödel 数、
$\mathrm{insert}(y, x) = \langle x, x_1, \ldots, x_n \rangle =$ 最初に x を追加した数列の Gödel 数、
$\mathrm{left}(y) = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle =$ 右端を除いた数列の Gödel 数、
$\mathrm{right}(y) = \langle x_2, \ldots, x_n \rangle =$ 左端を除いた数列の Gödel 数。
このうち、講義で説明しなかったものを原始帰納的関数として構成せよ。ただし、全域関数にするための吟味は省略してもよい（たとえば空列に対する first のように定義できない部分は 0 と定める、など）。

17. その他、講義で省略した部分を埋めよ。この他に講義中に出したレポート問題も有効である。また、講義に関連する事柄で考えたことを提出してもよい。