Schedule

§1. crepant resolution
§2. Toric
§3. Known results
§4. Main Result

§1. crepant resolution

X : $\mathbb{Q}$-Gor.
K_X : Can. div. on X

$\varphi : Y \to X$: resol.
$\{D_i\}$: exc. div.

$$K_Y = \varphi^* K_X + \sum_i a_i D_i$$

Def
- $\mathrm{discr}(D_i) := a_i$
- $\forall i$, $\mathrm{discr}(D_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi$: crepant

Fact
- $n \leq 3 \Rightarrow \forall \underset{\text{finite}}{G} \subset SL(n, \mathbb{C})$

  $\mathbb{C}^n/G$: crep. resol. アリ

- $n \geq 4 \Rightarrow$ 一般に $\mathbb{C}^n/G$: crep. resol. ナシ

例 $\overset{n=4}{G} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \curvearrowright \mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n/G$: crep. resol. ナシ

Notation

以下 $G \subset SL(n, \mathbb{C})$: finite abelian

- $g \in SL(n, \mathbb{C})$: finite order

$\exists h$, $hgh^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i \theta_i} \end{pmatrix}$ $\theta_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$

このような元を $\frac{1}{s}(t_1, \cdots, t_n)$ と表す。 $\theta_i = \frac{t_i}{s}$

- $\mathrm{age}(g) := \frac{1}{s}\sum_i t_i$

§2. Toric

Notation

$N := \mathbb{Z}^n$, M: dual mod of N

$N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$: rational convex polyhedral cone

$X(N, \sigma)$: Toric var. for σ

Fact

- $\sigma = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$

$\Rightarrow X(N, \sigma) \cong \mathbb{C}^n$

- $G = \langle \frac{1}{s_i}(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n}) \rangle_{i=1,\cdots,m}$

$\mathbb{C}^n / G \cong X(N', \sigma)$ (＊)

$N' := \mathbb{Z}^n + \sum_i \frac{1}{s_i}(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})\mathbb{Z}$

Prop (∗)のとき
$X(N,\sigma)$ の resol. 即ち N' の中で
σ を細分するときに用いた lat. pt. $b_i \in N'$ とすると

$$\mathrm{discr}(D_i) = \mathrm{age}(b_i) - 1$$

§3. Known Resolution

Thm [Dais D.I, Henk M and Ziegler G.M.]
全ての次元において任意の abel. quot. sing. で
c.i. の場合

$\mathbb{C}^n/G$ は proj. crep. resol. を持つ

Thm [Dais D.I, and Henk M]
$n \geq 3$

$G = \langle \frac{1}{s}(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1}, (s-n+1)) \rangle$ ~~のとき~~ $\Big\langle$ $s \equiv 0$ or $1 \pmod{n-1}$ のとき

$\mathbb{C}^n/G$: proj. crep. resol. アリ.

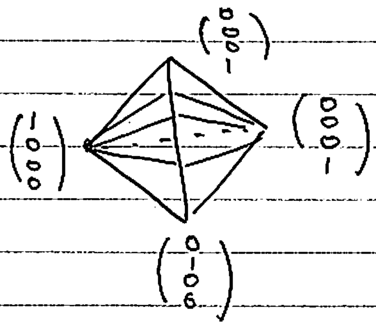
Thm [Dais D.I., Hans U.U. and Henk M]

$n \geq 3$ $G = \langle \frac{1}{s}(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-2}, a, b) \rangle$ とする. $(a+b+n-2 = s)$

- $\gcd(a, b, s) = n-2$
- $\gcd(a, b, s) = 1$ で …… ←長いので略!!

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}^n/G$: proj. crep. resol. アリ!

Thm[DH]の見方



§4. Main Result

Prop p: prime number

$G \subset SL(4,\mathbb{C})$: finite abel sub gr. gen. by ord. p elem.

のときGは以下に分類される.

(1) $\langle \frac{1}{p}(1, a, b, c) \rangle$

(2_{12}) $\langle \frac{1}{p}(1, 0, a, p-a-1), \frac{1}{p}(0, 1, b, p-b-1) \rangle$

(2_{13}) $\langle \frac{1}{p}(1, a, 0, p-a-1), \frac{1}{p}(0, 0, 1, p-1) \rangle$

(2_{23}) $\langle \frac{1}{p}(0, 1, 0, p-1), \frac{1}{p}(0, 0, 1, p-1) \rangle$

(3) $\langle \frac{1}{p}(1, 0, 0, p-1), \frac{1}{p}(0, 1, 0, p-1),$
$\frac{1}{p}(0, 0, 1, p-1) \rangle$

Thm[S] (2_{13})で $a = 1, \frac{p-1}{2}, p-2, p-1$ のとき

$\mathbb{C}^4/G$ は proj. crep. resol. をもつ