8/9 トロピアカル曲線について 吉冨修平(東京大学)

- トロピカル曲線(定義)
- トロピカル版 ~~Riemann~~ Riemann-Roch の紹介

  (2006 Gathmann-Kerber)

トロピカル = 区分的 $\mathbb{Z}$-affine linear かつ局所凸

例 $C = \mathbb{R}$: トロピカルである.

$f : C \to \mathbb{R}$ が有理関数

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \in \mathbb{Z}$ $\forall p \in C$

Corner value

↑ 区分的 affine linear

f : 正則

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f : 有理 かつ 局所凸

background (of definition)

$\mathrm{Log}_t : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}^2$

$(a, b) \longmapsto \left(\frac{\log|a|}{\log t}, \frac{\log|b|}{\log t} \right)$

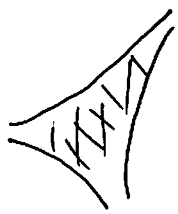
$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \amalg \{\underset{\underset{\log 0}{\parallel}}{-\infty}\}$$

$f_t \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$

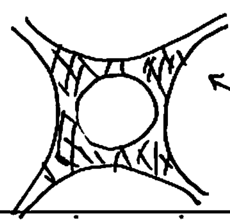
$V_t := V(f_t)$

$A_t = \mathrm{Log}_t(V_t)$: V_t のアメーバ

例



← $z_1 + z_2 + 1$



← $z_1 + z_2 + z_1 z_2 + t^{-1} z_1 z_2^2 + t^{-1} z_1^2 z_2$

No. 2 Date

$\lim_{t\to\infty} A_t$?

$t \in K$ 付値体 $\mathrm{val}(t) = 1$

$$K = \lim_{m\to\infty} \mathbb{C}((t^{-\frac{1}{m}}))$$

$$= \left\{ \sum_{g\in\Lambda} a_g t^g \;\middle|\; \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{Q} \quad \text{上に有界} \\ \exists m \quad \Lambda \subset \frac{1}{m}\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{val} : K^2 \to \tilde{\mathbb{R}}^2$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (\mathrm{val}(z_1), \mathrm{val}(z_2))$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} A_t = \mathrm{val}(V_t)}$$

㊟ $\mathrm{val}(V)$ の計算

$$f_t = \sum c_{ij} z_1^i z_2^j \qquad c_{ij} \in K$$

$(a_t, b_t) \in V$

$$\sum c_{ij} (a_t)^i (b_t)^j = 0$$

$$v_{ij} = \mathrm{val}(c_{ij}) + i\underbrace{\mathrm{val}(a_t)}_{= x_1} + j\underbrace{\mathrm{val}(b_t)}_{= x_2}$$

少なくとも2つの v_{ij} が最大

$\max_{i,j} \left(\mathrm{val}(c_{ij}) + i x_1 + j x_2 \right)$: 区分的 $\mathbb{Z}$-affine linear, 局所凸

ここで、 max $\longleftrightarrow$ $\oplus$, $+ \longleftrightarrow \odot$ という記号の置き換えをする。

$$= \bigoplus_{i,j} \mathrm{val}(c_{ij}) \odot x_1^{\odot i} \odot x_2^{\odot j}$$

$$=: f_t^{\mathrm{trop}} \in \tilde{\mathbb{R}}[x_1, x_2] \quad : f \text{ のトロピカル化}$$

$(a_t, b_t) \in V \Rightarrow f_t^{\mathrm{trop}}$ は $(\mathrm{val}(a_t), \mathrm{val}(b_t))$ で corner value をとる。

Def $\quad g \in \tilde{\mathbb{R}}[x_1, x_2]$

$$V(g) := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g \text{ は } (a, b) \text{ で corner value をとる} \right\}$$

$\uparrow$ トロピカル曲線

Prop $\quad f_t \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$

$$\Rightarrow \overline{\mathrm{Val}(V(f_t))} = V(f_t^{\odot})$$

$(\tilde{\mathbb{R}}[x, y], \oplus, \odot)$ 半環 ~~i.e.~~ (可換、引き算がない)

$a \oplus (-\infty) = a \qquad -\infty$: zero 元

$a \odot 0 = a \qquad 0$: 単位元

"トロピカル幾何 ≒ 半環の幾何"

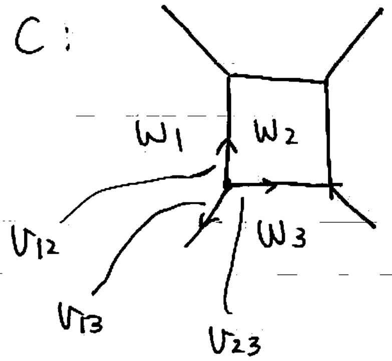
$C = V(g)$ トロピカル曲線.

$$N = \left\{ \mathrm{Conv}(w_1, \dots, w_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{R}^2 \\ g(x) = c_{w_i} \odot x^{w_i} \end{array} \right\}$$

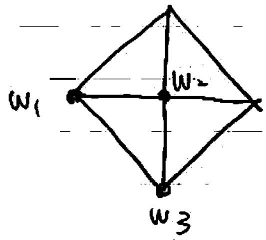
↑ 単体複体になる (Newton複体とよぶ)

$\Delta(C) := \mathrm{Conv}(\mathrm{Newt}(C))$ Newton polytope.

例 C:



Newt(C):



- v_{12} : primitive vector

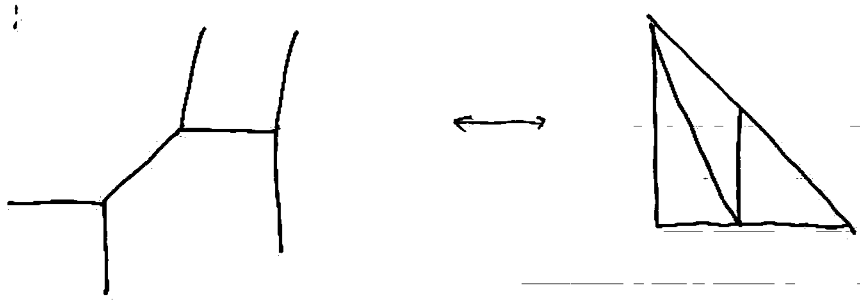
  $|v_{12}| = |w_2 - w_1|$, $v_{12} \perp (w_2 - w_1)$

- $v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0$ (バランス条件)

トロピカル曲線 = バランス条件をみたす単体複体.

例 $f = -1 \odot x^2 \oplus x \odot y \oplus y^2 \oplus x \oplus -2$

C:



$D^1 \sim D^2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} D^1 - D^2 = (f)$

$\mathrm{Div}^0(C)/\sim \ \cong$ トーラス

Def C：トロピカル曲線

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $C = \bigcup_i C_i \qquad C_i \subset \mathbb{R}^n$

$\longrightarrow$ $\Gamma(C, \mathcal{O}_C^*)$ ：群

$\mathbb{Z}$-affine func のなす層

$\Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ ：半環

正則 func のなす層.

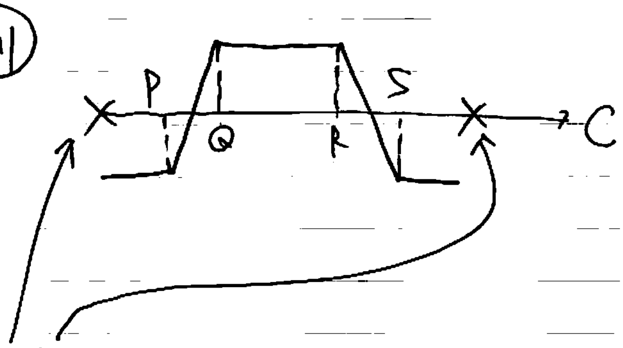
Riemann-Roch

$$\mathrm{Div}^d(C) := \left\{ \sum a_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum a_i = d \\ p_i \in C \end{array} \right\}$$

$f : C \to \widetilde{\mathbb{R}}$ (有理関数) に対し

$$(f) := \sum_{p \in C} \left(\sum_{i=1}^{k(p)} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(p) \right) p$$

例



$(f) = P - Q - R + S$

貼り合わせる.

$$K_C = \sum_{p \in C} (k(p) - 2)\, p$$

Thm $D \in \mathrm{Div}(C)$

$$r(D) - r(K_C - D) = 1 - g + \deg D$$

但し、

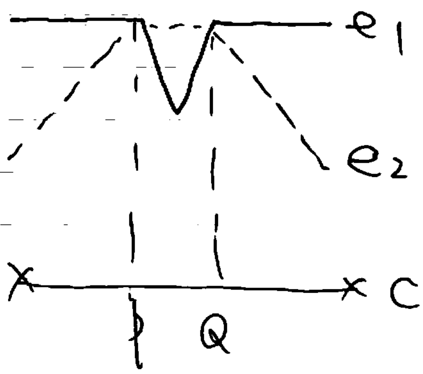
- $r(D) = 1 + \max\left\{ r \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall p_1 \cdots p_r \in C \\ H^0(D - p_1 - \cdots - p_r) \neq -\infty \end{array} \right\}$

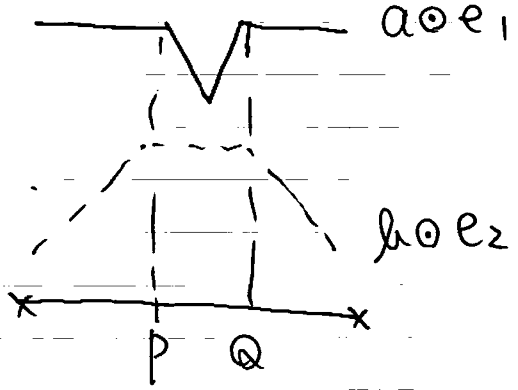
- $H^0(D) = \{ f \mid (f) + D \geq 0 \} \cup \{-\infty\}$

$h^0(D) = \dim \underline{H^0(D)}$??

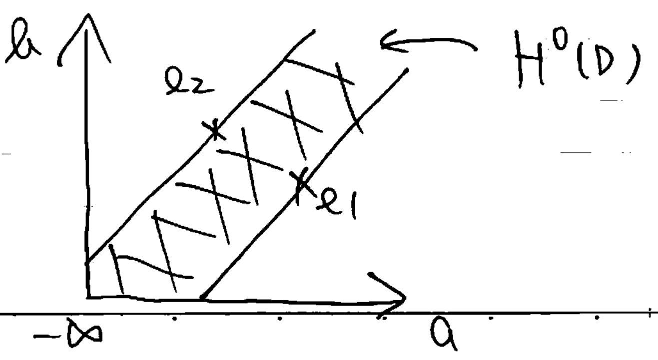
$\nwarrow$ $\tilde{R}$-module

例 $g = 1$ $D = P + Q$





$$H^0(D) = \{ a \odot e_1 \oplus b \odot e_2 \mid a, b \in \tilde{R} \} \quad (\neq \tilde{R}^2)$$



$\langle e_1, e_2 \rangle$: basis of $H^0(D)$

Question

- $H^0(D)$ は $\hat{R}$-module として basis をもつか？

(一般の $\hat{R}$-module はそうとは限らない)

($\xrightarrow{\text{if so}}$ dim $H^0(D)$ が定義される)

- $h^0(D) = r(D)$ ？

$\longrightarrow$ $h^0(D) - h^0(K_C - D) = 1 - g + \deg D$