Date 8.9 No. 1.

形式的超ループ空間と頂点作用素代数

高橋宣能（広島大学）　　(chiral de Rham complex)

Introduction

背景　　　X：多様体

弦の古典論

弦のなす空間　$Map(S^1, X)$

「ループ空間」

量子化（非可換化）

弦の量子論

状態ベクトルのなす空間

≒ループ空間上の函数空間

頂点作用素代数

代数的モデル.

X：代数多様体 ⇝ chiral de Rham complex Ω_X^{ch}

chiral differential operators $\mathcal{O}_X^{ch}$

(Malikov-Schechtman-Vaintrob)

「形式的ループ空間」による構成 (Kapranov-Vasserot)

アーク空間　$\mathcal{L}^0(X) = Mor(Spec\,\mathbb{C}[[t]], X)$

形式的ループ空間　$\cap$

$\mathcal{L}(X)$　　$\mathcal{L}^0(X)$の形式的近傍

$$\Omega_X^{ch} \doteqdot \text{"}i^{\cdot}_{*}\Omega^{\cdot}_{\mathcal{L}^0(X)}\text{"}$$

D加群として.

今日のお話

「超ループ空間による Ω_X^{ch} の自然な構成

$\widetilde{\mathcal{L}}^0(X), \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ 上に "$\mathcal{O}$" を作る.

背景：量子力学，S^1上の場の理論

	空間	phase space	量子論
粒子	$X=\mathrm{Map}(pt,X)$ x	T^*X x, p	diff ops $\curvearrowright$ X上の関数空間 $[x, \frac{1}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x}]=i$ $\hookrightarrow p$
弦	$\mathrm{Map}(S^1,X)$ (x_i) $x(t)=\sum_{\mathbb{Z}} x_i t^{-i}$ (Fourier展開)	略	"$[a(t), x(t')]=\delta(t-t')$" $\parallel$ $\sum a_i t^{-i}$ $[a_i, x_j]=\delta_{i+j,0}$ $a_i \doteqdot \frac{\partial}{\partial x_{-i}}$

代数多様体Xでの類似.

形式的ループ空間

- chiral differential oper. $\mathcal{O}_X^{ch}$
- chiral de Rham $\Omega_X^{ch.}$

背景：超幾何学 (Manin ---)

Def

(1) (SComm)：超可換$\mathbb{C}$-代数の圏

obj：$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-graded $\mathbb{C}$-alg

$$x \mapsto \tilde{x} = \deg x$$

homog.

$$xy = (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} yx. \quad (x,y : \text{homog})$$

Mor： gradingを保つ.

$$R = R_0 \oplus R_1 \rightsquigarrow R_{red} := R/R_1R. \quad (\text{可換})$$

(2) テンソル積.

$$(r_1 \otimes s_1)\cdot(r_2 \otimes s_2) = (-1)^{\tilde{s}_1\tilde{r}_2} r_1 r_2 \otimes s_1 s_2$$

(3) superspace : $(Y, \mathcal{O}_Y)$
$\mathcal{O}_Y$: SComm の層.
$(Y, \mathcal{O}_Y)$: local ringed space.

$$Y_{red} := (Y, \mathcal{O}_Y)_{red}$$

(5) supermfd.
- Y_{red} : alg mfd
- locally $\mathcal{O}_Y \cong \wedge \mathcal{E}$ $\quad \mathcal{E}$: loc. free.

とくに X : alg mfd $\rightsquigarrow \tilde{X} := (X, \Omega_X^{\cdot})$

(4) $R \in (\mathrm{SComm})$
$\longrightarrow \mathrm{Spec}\, R = (\mathrm{Spec}\, R_{red}, \mathcal{O})$

(6) superspace の mor : grading を保つ + loc. ringed sp. の mor.

Ex.
X : algebraic manifold.

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{SComm}) & \longrightarrow & (\mathrm{Set}) \\ R & \longmapsto & \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, R[\varepsilon], X) \end{array}$$

$$\left(R[\varepsilon] = R \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\varepsilon] \qquad \mathbb{C}[\varepsilon] = \underset{0}{\mathbb{C}} \oplus \underset{1}{\mathbb{C}\varepsilon} \quad (\varepsilon^2 = 0) \right).$$

は, $\tilde{X} = (X, \Omega_X^{\cdot})$ で表現される.

説明
たとえば, $X = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x]$

$$\mathrm{Spec}\, R[\varepsilon] \longrightarrow X$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{C}[x] \longrightarrow R[\varepsilon] = (R_0 \oplus R_1 \varepsilon) \oplus (R_1 \oplus R_0 \varepsilon)$$

No. Date

$$\Leftrightarrow \quad x \mapsto r_0 + r_1\varepsilon \in R_0 \oplus R_1\varepsilon.$$

$$y = f(x) \mapsto f(r_0 + r_1\varepsilon) = f(r_0) + f'(r_0) r_1 \varepsilon.$$

$$\operatorname{Spec} R \to \tilde{X}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{degree } 1.}}{\mathbb{C}[x, dx]} = \mathbb{C}[x] \oplus \mathbb{C}[x]\, dx \longrightarrow R = R_0 \oplus R_1.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x \mapsto r_0 \in R_0 \\ dx \mapsto r_1 \in R_1. \end{array}$$

$$y = f(x). \Rightarrow \begin{array}{l} y \mapsto f(r_0) \\ dy = f'(x)dx \mapsto f'(r_0) r_1 \end{array}$$

$$\tilde{X} = (X, \Omega_X^{\cdot}) = \operatorname{Mor}(\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\varepsilon], X)$$

x^μ : local coord. $\quad \xi^\mu \Leftrightarrow dx^\mu$

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\quad \partial'_\mu = \dfrac{\partial}{\partial \xi^\mu}$: 左からの微分.

Prop

xの座標変換.

$\tilde{x}^\mu = g^\mu(x)$.

$$\longrightarrow \quad \partial_\mu = \sum_\nu \left\{ (\partial_\mu g^\nu(x)) \tilde{\partial}_\nu + \sum_\lambda (\partial_\lambda \partial_\mu g^\nu(x)) \xi^\lambda \tilde{\partial}'_\nu \right\}$$

$$\partial'_\mu = \sum_\nu (\partial_\mu g^\nu(x)) \tilde{\partial}'_\nu$$

pf. 例えば、$\partial_\mu \tilde{\xi}^\nu$を計算

$$\tilde{\xi}^\nu = \sum_\lambda (\partial_\lambda g^\nu(x)) \cdot \xi^\lambda \qquad \square$$

Date . . No.

Prop $\upsilon = \sum (u^\mu \partial_\mu + \upsilon^\mu \partial_{\mu}')$ とし.

$$F\cdot\upsilon := -\sum \{\partial_\mu (F u^\mu) + (-1)^{\tilde{F}+\tilde{\upsilon}^\mu} (F \upsilon^\mu)\}$$

は. Xの座標変換で不変.

"$\mathcal{D}_X$" は. $\mathcal{O}_X = \Omega_X^{\cdot}$ に右からも作用する.

Chiral diff ops & chiral de Rham complex

([MSV]) A^d の場合.

V : $\mathbb{C}$-vec. sp. とし.

$$\mathbb{C}[\underbrace{b_i^\mu}_{\text{arc}}, a_j^\mu, \overbrace{\underbrace{\phi_i^\mu}_{\text{super}}, \psi_j^\mu}^{\text{odd}} \mid 1 \le \mu \le d,\ i \le 0,\ j < 0]$$

operator : $b_i^\mu, a_i^\mu, \phi_i^\mu, \psi_i^\mu$. $(i \in \mathbb{Z})$

$$[a_j^\mu, b_i^\nu] = \delta_{\mu,\nu}\delta_{i+j,0}$$

$$[\psi_j^\mu, \phi_i^\nu] = \delta_{\mu,\nu}\delta_{i+j,0}$$

vertex operation ……

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i^\mu t^{-i}$$

$\shortparallel$

$b_0^\mu(t) + \varepsilon\phi_0^\mu(t)$: formal super loop と考える.

$$\phi_0^\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_i^\mu t^{-i}$$

座標変換.

⇝ が然るべく変換.

a, ψ もそれに合わせて.

⟶ 一般多様体に対して貼り合せできる.

Ω_X^{ch} : chiral de Rham complex

No. Date

(a. b のみ. 障害あり
chiral diff. cpx)

Kapranov - Vasserot · ~~幾~~何学的構成

$\mathcal{L}^0(X) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(X)$

大体: $\mathcal{O}_X^{ch} \doteqdot i_\bullet \mathcal{O}_{\mathcal{L}^0(X)}$
(D加群として).

$\Omega_X^{ch} \doteqdot i_\bullet \Omega_{\mathcal{L}(X)}$

$\mathcal{O}_{\mathcal{L}^0(A^1)} = \mathbb{C}[b_0, b_{-1}, b_{-2}, \cdots\cdots]$

$i_\circ \mathcal{O}_{\mathcal{L}^0(A^1)}$: $\mathcal{L}^0(A^1)$に台をもつδ函数的な層.

$\doteqdot \mathbb{C}[b_0, b_{-1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial b_1}, \frac{\partial}{\partial b_2}, \cdots]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \quad \updownarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad a_{-1} \quad a_{-2}.$

問題点 : Laurent 級数 : うまくいかない.
$\longrightarrow$ " formal ".
D加群がむずかしい.

formal superloop sp. を使った構成.

super jet sp.

$\tilde{\mathcal{L}}^0_n(X) := (R \longmapsto \mathrm{Map}_R(\mathrm{Spec}\, R[\varepsilon][[t]]/(t^{n+1}), X))$

super arc sp.

$\tilde{\mathcal{L}}^0(X) := \varprojlim \tilde{\mathcal{L}}^0_n(X)$

formal superloop sp. $X = \mathrm{Spec}\, A$, x_0^μ : étale coord.

$\rightsquigarrow R := A[x_i^\mu, \xi_j^\mu]_{i, j \in \mathbb{Z}}^{i \neq 0}$

$$\deg\begin{pmatrix} x_i^\mu \\ \xi_i^\mu \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & (i<0) \\ i & \end{cases}$$

$\tilde{\mathcal{L}}(X) = \varinjlim \mathrm{Spec}\, R/\underset{\substack{\uparrow \\ \deg \geq m}}{I_m}$ ⇝ 貼り合わせができる.

$$\partial_\mu^i := \frac{\partial}{\partial x_i^\mu}, \quad \partial'^i_\mu := \frac{\partial}{\partial \xi_i^\mu}$$

$$v := \sum (u_i^\mu \partial_\mu^i + \upsilon_i^\mu \partial'^i_\mu)$$

$F \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)}$ に対して ($* = 0$ or 無し or $\tilde{\mathcal{L}}_n \cdots$)

$$F\upsilon := -\sum\left(\partial_\mu^i (F u_i^\mu) + (-1)^{\tilde{F}+\tilde{\upsilon}_i^\mu} (F \upsilon_i^\mu)\right)$$

とくに、

$v := \sum_{i \leq 0} x_i^\mu \partial_\mu^i$: der on $\tilde{\mathcal{L}}^0(X)$, $1\upsilon = \infty$

Sheaf $\mathcal{S} := \left\{ \sum(u\partial + \upsilon\partial') \;\middle|\; \begin{array}{l} u_i^\mu \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X)} \leftarrow x_i^\mu \text{のみ} \\ \partial_\nu^j u_i^\mu + (-1)^{\tilde{\upsilon}_i^\mu} \partial'^j_\nu \upsilon_i^\mu = 0 \\ (\forall i, j, \mu, \nu) \end{array} \right\}$

<u>Prop</u> $\mathcal{S}$ は、coord によらない.

<u>Def.</u>

$$\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)} := \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)})$$

<u>Prop</u> $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)}$ は $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}^*(X)}$ に右からも作用.

No. Date . .

$$\mathcal{J} := \left\{ \sum a_\alpha \partial^\alpha \in D_{\tilde{\mathcal{L}}(X)} \;\middle|\; a_\alpha \in I_{\tilde{\mathcal{L}}^o(X)} \right\}.$$

$$\pi : \tilde{\mathcal{L}}^o(X) \to X$$

Prop

$$\Omega_X^{ch} \cong \pi_* \left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}^o(X)} \underset{D_{\tilde{\mathcal{L}}^o(X)}}{\otimes} \left(D_{\tilde{\mathcal{L}}(X)} / \mathcal{J} \right) \right)$$

(sheaf of $\mathbb{C}$-v.s.)