有限次元代数の表現論入門

斉藤義久（東京大学）

X: alg var / $\mathbb{C}$
$D(X) \cong D(A\text{-mod})$
　　$\exists A$: f.d alg
　A-mod　有限生成 A-module の
　　　　　なす category
例 (Beilinson)
　$X = \mathbb{P}^n$　A mod　"Beilinson quiver の表現"

　A . f.d. alg / K　$(K = \bar{K})$
　　A を分類する
(1) 同型類 $\longrightarrow$ hopeless
(2) Morita 同値類を分類する

Def
　A と A' が Morita 同値
　$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$A\text{-mod} \cong A'\text{-mod}$ //

例
　$A = \mathrm{Mat}(n, K)$
　$V = K^n$
　$A \curvearrowright V$

Fact
　V は A-mod の唯一の simple object で A-mod は
　semi simple object である
　　$\longrightarrow$　$A = \mathrm{Mat}(n, K)$,　$A' = \mathrm{Mat}(m, K)$

$$\begin{array}{ccc} A\text{-mod} & \xrightarrow{\sim} & A'\text{-mod} \\ \cup & & \cup \\ (K^n)^{\oplus \ell} & \longmapsto & (K^m)^{\oplus \ell} \end{array}$$

例　$A = K[G]$　(G : 有限群)
　$\rightarrow A \cong \bigoplus_n \mathrm{Mat}(n, K)$　(Wedderburn の構造定理)

$$\to K[G]\text{-mod} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{Mat}(n;K)\text{-mod} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} K\text{-mod}$$

<u>Rem</u> 一般Aに対しては A-mod は semisimple とは限らない
(既約分解できるとは限らない)
これ以上分解できない module を直既約 (indecomposable -module)
→ 例は後出

<u>Thm (Krull-Schmidt-Azumaya)</u>
A : f.d alg$/K$ $V \in A$-mod
$\Rightarrow$ Vの直既約分解は一意的 //

<u>言葉の準備</u>

<u>(1) radical</u>

<u>Def</u>

- $\mathrm{rad}(A) := \bigcap_{I:\,A\text{の極大左イデアル}} I$ (Jacobson radical)
- $\mathrm{rad}(A)=0$ のとき A を semisimple という //

<u>Fact</u>

- $\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{J:\,A\text{の極大右イデアル}} J$
- $\mathrm{rad}(A)$: Aの twosided ideal
- $\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A)) = 0$
  i.e. $A/\mathrm{rad}(A)$: semisimple
- A : semisimple
  $\Leftrightarrow$ A-mod が semisimple cat

(2) 巾等元 (idempotent)

<u>Def</u>

- $e(\neq 0) \in A$ が idempotent $\overset{\text{def}}{\iff} e^2 = e$
- e_1, e_2 : idempotent が直交する

$\underset{\text{def}}{\iff} \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

$e_1, \cdots, e_n$ が直交する

$\underset{\text{def}}{\iff} \quad \forall e_i e_j = 0 \quad (i \neq j)$

e : primitive (原始的)

$\underset{\text{def}}{\iff}$ e が2つの idempotent の和にかけない

<u>Rem</u>

- 1 idempotent
- $e_1, \cdots, e_n$ 直交する idempotent

$\Rightarrow e := e_1 + \cdots + e_n$ idempotent (eの巾等元分解)

<u>Fact</u>

e : idempotent

次は同値

(a) e : primitive

(b) Ae が直既約 //

$\Rightarrow \; 1 = e_1 + \cdots + e_n \quad (e_i : \text{primitive})$ (互いに直交) (1の原始巾等元分解)

があると

$$A = A \cdot 1 = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i \quad (A\text{の直既約分解})$$

$P_i = Ae_i$: indec. proj.

$\longrightarrow$ indec proj のリストが得られる.

さらに

$S_i := P_i / \mathrm{rad}(A) e_i$

は simple module で

simple A-mod は up to isom でこれらのみ

◎ 1の原始巾等元分解

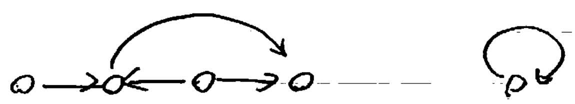
$\longrightarrow$ indec proj. / simple } リスト

(3) path algebra

Def 頂点 (vertex) 集合と各頂点を結ぶ矢印 (arrow) からなる

グラフ $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ を quiever

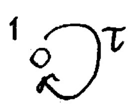
Γ_0: 頂点集合 Γ_1: 矢印集合

例  etc

仮定

- ある頂点 i から ある頂点 j へ向う矢印は有限個
  (locally finiteness cond.)
- $\overset{i}{\circ} \xrightarrow[\tau]{} \overset{j}{\circ}$ $out(\tau) = i$, $in(\tau) = j$
- $\# \Gamma_0 < \infty$. $\# \Gamma_1 < \infty$ のとき Γ を finite quiever
- $\circ \xrightarrow{\tau_1} \circ \xrightarrow{\tau_2} \circ \xrightarrow{\tau_3} \circ \cdots \circ \xrightarrow{\tau_m} \circ$
  なるとき $\sigma = \tau_m \tau_{m-1} \cdots \tau_2 \tau_1$ (arrowの合成)
  を長さ (length) の m の path
  Γ_m : 長さ m の path の全体

Rem
頂点: 長さ 0 の path $= \Gamma_0$
矢印: 〃 1 〃 $= \Gamma_1$ 〃

例 

length	0	1	2	3 ...
path	1	τ	τ^2	τ^3 ...

∞-個の path がある

例 $\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau_1} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\tau_2} \underset{3}{\circ}$

長さ	0	1	2
path	1, 2, 3	τ_1, τ_2	$\tau_2\tau_1$

$\boxed{\text{以下 } \Gamma \text{ は finite quiever と仮定する}}$

Def

$$K\Gamma := \bigoplus_{\sigma:\text{path}} K\sigma$$

積：pathの合成　（合成できないときは 0）

path algebra //

例

$\circlearrowleft_\tau = \Gamma \qquad \Gamma \cong K[x] \quad \infty\text{-dim}$

$\tau \leftrightarrow x$

例 $\circ \to \circ \to \circ$　　e_i：vertex に対応する長さ 0 のpath

$K\Gamma = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus K\tau_1 \oplus K\tau_2 \oplus K\tau_2\tau_1$　（6次元）

$e_i^2 = e_i$　巾等元

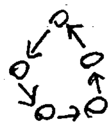
$e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = 0$　互いに直交

$$K\Gamma \cong \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

Rem

$K\Gamma$ が有限次元

$\Leftrightarrow$ Γ が oriented cycle をもたない


をもたない

以下 oriented cycle をもたないと仮定する.

lemma

Γ: finite, without oriented cycle

(1) e_i: 互いに直交する primitive idempotents

(2) $1 = e_1 + \cdots + e_n$

(3) $\mathrm{rad}\, K\Gamma = \bigoplus_{\sigma:\text{長さ}\geq 1} K\sigma$ //

$(K\Gamma)_1$

例 $\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau_1} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\tau_2} \underset{3}{\circ}$

$P_1 = Ae_1 = Ke_1 \oplus K\tau_1 \oplus K\tau_2\tau_1$ (3次元)

$P_2 = Ae_2 = Ke_2 \oplus K\tau_2$ (2次元)

$P_3 = Ae_3 = Ke_3$ (1次元)

$S_1 = Ae_1/\mathrm{rad}(A)e_1 = K\bar{e}_1$

$S_2 = K\bar{e}_2$, $S_3 = K\bar{e}_3$ (1次元)

lemma $n = \#\Gamma_0$

(1) S_i : 1次元

(2) $K\Gamma/\mathrm{rad}\,K\Gamma \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K\bar{e}_i \cong K^{\oplus n}$ //

◎ 有限次元代数のMorita同値類による分類

quiever with relation

Def Γ : finite

(1) $\sigma = \tau_m \tau_{m-1} \cdots \tau_1$

$\circ \xrightarrow{\tau_1} \xrightarrow{\tau_2} \cdots \xrightarrow{\tau_m} \circ$

$\mathrm{out}(\sigma) = \mathrm{out}(\tau_1)$

$\mathrm{in}(\sigma) = \mathrm{in}(\tau_m)$

(2) $\mu \in K\Gamma$ が Γ のrelation

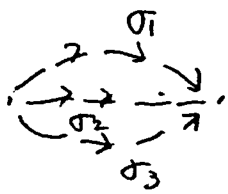
$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu = a_1\sigma_1 + \cdots + a_\ell\sigma_\ell$

$a_i \in K$

$\sigma_1, \cdots, \sigma_\ell$: 長さ2以上のpath

$\mathrm{out}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{out}(\sigma_\ell)$

$\mathrm{in}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{in}(\sigma_\ell)$



(3) (Γ, ρ) : quiever with rel.

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ Γ : quiever

$\rho = \{\mu_t\}_{t \in \Gamma}$ μ_t : relation

$K(\Gamma, \rho) := K\Gamma/\langle\rho\rangle$

path algebra with relation

Rem

Γ : oriented cycle path
$\longrightarrow K\Gamma$: ∞-dim
$\langle \rho \rangle$ をうまくとると $K(\Gamma, \rho)$ は f.d. になることがある

Thm

$K = \overline{K}$
A : f.d. alg / K
$\exists (\Gamma, \rho)$ quiever with rel.
s.t. $A\text{-mod} \cong K(\Gamma, \rho)\text{-mod}$ // （証明は構成的）

$\longrightarrow$ 分類は $K(\Gamma, \rho)$-mod を調べることに帰着

Rem $K \neq \overline{K}$ だとうそ!!

Fact

- $K\Gamma \twoheadrightarrow K(\Gamma, \rho)$ canonical projection
- $\overline{1} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n}$
  $K(\Gamma, \rho)$ の 1 の原始巾等元分解を与える
- $\mathrm{rad}(K(\Gamma, \rho)) = \overline{\mathrm{rad}\, K\Gamma}$
  $\Longrightarrow K(\Gamma, \rho)$ でも $\left\{ \begin{array}{l} \text{indec. proj.} \\ \text{simple} \end{array} \right\}$ リストが得られる.

$K(\Gamma, \rho) \longleftrightarrow$ すべての A
$\cup$
$K\Gamma \longleftrightarrow$?
(without rel.) "hereditary" （遺伝的）

Def

A : f.d. alg
A が hereditary
$\overset{\text{}}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ すべての左 ideal が projective module //

Prop

次は同値

(a) A は hereditary

(b) $\mathrm{rad}(A)$: projective

(c) $\mathrm{gl\,dim}\, A \leq 1$

但し $M \in A\text{-mod}$

$\mathrm{pd}_A(M) := \sup\{ n \mid \exists N \in A\text{-mod}.\ \mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0 \}$ M の projective dim.

$\mathrm{gl\,dim}(M) := \sup\{ \mathrm{pd}_A(M) \mid M \in A\text{-mod} \}$ A の global dim.

例

$$\underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau_1} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\tau_2} \underset{3}{\circ}$$

$$\mathrm{rad}(K\Gamma) = \underbrace{K\tau_1 \oplus K\tau_2\tau_1}_{\substack{\wr\!\wr \\ A\tau_1 \\ \wr\!\wr \\ P_2}} \oplus \underbrace{K\tau_2}_{\substack{\wr\!\wr \\ A\tau_2 \\ \wr\!\wr \\ P_3}} \Rightarrow K\Gamma \text{ は hereditary}$$

path alg. 表現と quiever の表現

K : 一般

$\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$: quiever

Def

$\mathbb{V} = (V, B)$ が quiever Γ の表現

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $V = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} V_i$ Γ_0-grade vec. sp. $/K$

$B = (B_\tau)_{\tau \in \Gamma_1}$

$B_\tau : V_{out(\tau)} \longrightarrow V_{in(\tau)}$: K-lin

$\mathbb{V} = (V, B)$ $\mathbb{V}' = (V', B')$

$f : V \to V'$ Γ_0-grad vec sp. の射

が $\mathbb{V}$ から $\mathbb{V}'$ へ の morphism

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$$\begin{tikzcd} V_{out(\tau)} \arrow[r, "B_\tau"] \arrow[d, "f_{out(\tau)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_{in(\tau)} \arrow[d, "f_{in(\tau)}"] \\ V'_{out(\tau)} \arrow[r, "B'_\tau"'] & V'_{in(\tau)} \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ $\mathrm{Rep}\,\Gamma$: quiever 表現のなす category (abelian)

claim

$$K\Gamma\text{-mod} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}\,\Gamma$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longleftarrow & \mathbb{V}=(V,B) \\ M & \longmapsto & M_i := e_i M \end{array}$$

$$\to M = \bigoplus_{i\in\Gamma_0} M_i$$

Def

$\mathbb{V}=(V,B)\in \mathrm{Rep}\,\Gamma$

$\underline{\dim}\,\mathbb{V} = (\dim_K V_i)_{i\in\Gamma_0}$

dim vector

Rem

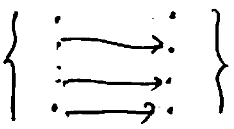
rel. 付 quiever の case も同様に def

$$\mathrm{Rep}(\Gamma,\rho) \cong K(\Gamma,\rho)\text{-mod}$$

KΓ-mod の構造

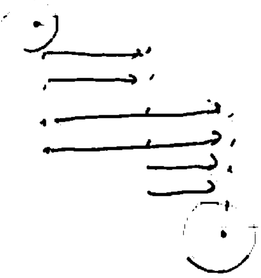
例

$\circ \longrightarrow \circ \qquad K^{d_1} \xrightarrow{B_\tau} K^{d_2} \longleftrightarrow$ rank の話

d_1  d_2

$$\left.\begin{array}{cc} K & 0 \\ K \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \\ 0 & K \end{array}\right\}\ 3つ$$

$\begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \\ \circ \to & \circ \to & \circ \end{array}$



$$\left.\begin{array}{ccc} K & 0 & 0 \\ K \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \\ 0 & K \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{array}\right\}\ 6種$$

3つのタイプ

(1) finite rep type (indec が有限個) (アフィンルート系)
(2) tame (∞コ コントロール可) $|\Gamma|$ が extended Dynkin
(3) wild (∞コ 不可)

<u>Thm (Gabriel)</u>

$K\Gamma$ が f. rep type $\Leftrightarrow$ $|\Gamma|$ underlying graph が A.D.E.

更に $\{\text{indec. module}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Delta_+$: set of positive roots

$$\begin{array}{ccc} \text{indec. module} & & \Delta_+ \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V & \longmapsto & \dim V \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \simeq Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha \\ & & \cup \qquad\qquad\qquad \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ & & (d_1, \cdots, d_n) \longleftrightarrow \sum d_i \alpha_i \end{array}$$

これは K に indep.