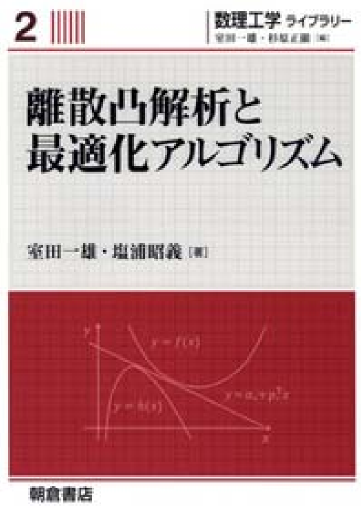
競争均衡の計算に対する反復オークションの計算量解析 ---離散凸解析によるアプローチ---



塩浦昭義

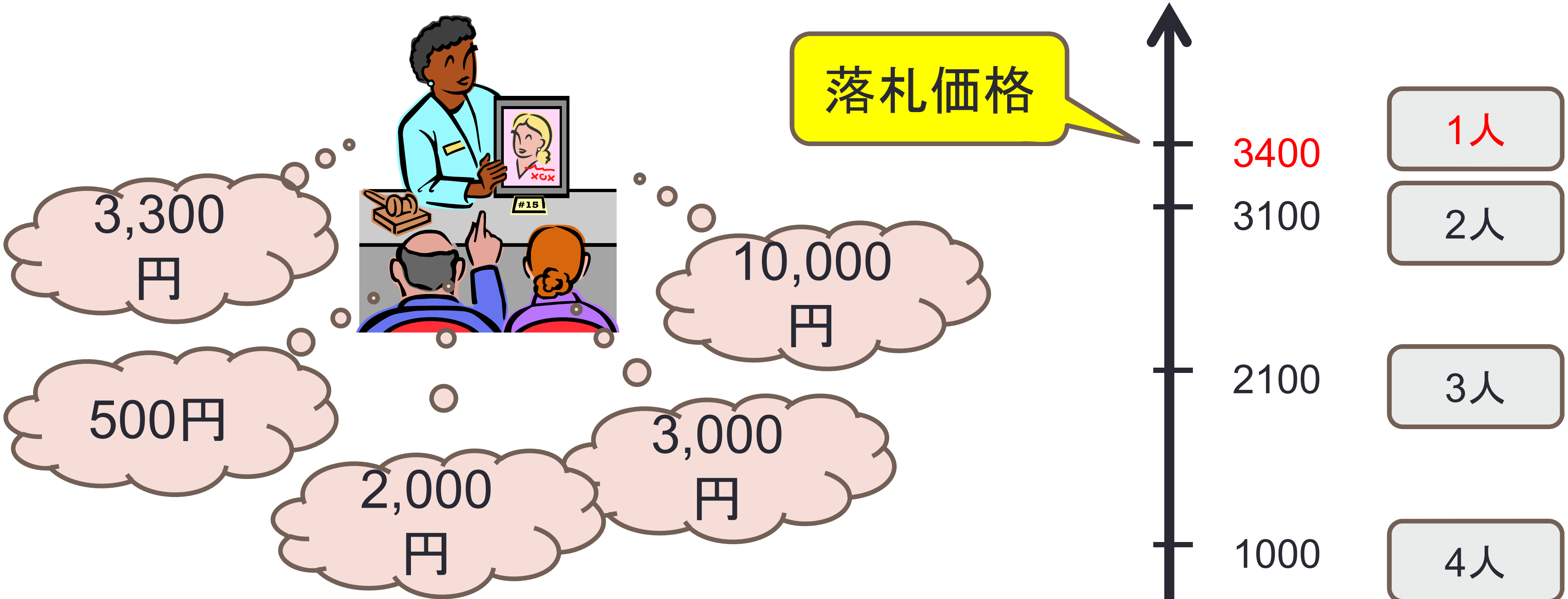
東北大学 大学院 情報科学研究科

2014/03/25 最適化研究集会（政策研究大学院大学）

室田一雄氏（東京大），
Zaifu Yang 氏（Univ. York, UK）
との共同研究

1つの財のオークション

- Ascending オークション（English オークション）
  - 価格を徐々に（1単位ずつ）上げる
  - 購入可能なオークション参加者が1人になったら終了



今日の話：複数の異なる品物のオークション

発表の概要

- Ausubel (2006)の複数財に対するAscending Auctionを
  離散凸解析の視点から理解
  - 効用関数 の 粗代替性 ＝ M♮凹性
  - 間接効用関数 ＝ L♮凸関数 (共役性)
  - Lyapunov 関数 の最小化 ＝ L♮凸関数 の最小化
  - オークション ＝ L♮凸関数最小化アルゴリズム

主結果:

- 種々の型のオークションの提案
  (English, Dutch, English-Dutch, Greedy)
- オークションの反復回数解析

オークションのモデル

- 商品の集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
  - 各商品の個数は1と限定
- m 人の参加者(bidder)で商品を分け合う
- 参加者 $i = 1, \ldots, m$ の**効用関数** $f_i \colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$

$f_i(X)$ =商品セット X の満足度
（単位：お金）


①


②

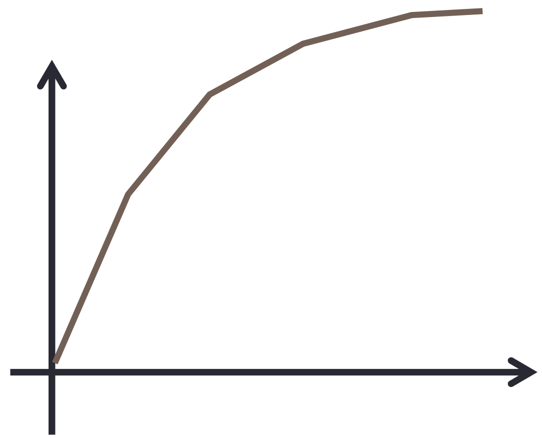

③


④


⑤

効用関数の例

①　②　③　④　⑤



- ①を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)
- 商品セット(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の
  一番良い商品にのみ依存 (unit-demand)
  {①, ②, ③}➔満足度70, {③, ④, ⑤}➔満足度100
- 商品数依存 (symmetric & concave)
  (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

間接効用関数と需要集合

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義：間接効用関数 $V_i: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$
  - $V_i(p) = \max\{f_i(X) - \sum_{j\in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義：需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{f_i(X) - \sum_{j\in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

価格pの下で
最も欲しい
商品セット全体

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき

- Aさん：①を含む商品セットは100，それ以外は0
  ➔ $V_A(p) = 40,\ D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん：重み和（①：50，②：70，③：40，④：30，⑤：100）
  ➔ $V_B(p) = 50,\ D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん：商品数依存（1つ：100，2つ：180，3つ：240，4つ：280，5つ：300）
  ➔ $V_C(p) = 60,\ D_C(p) = \{$商品数2または3$\}$

競争均衡

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \ldots, X_m)$ の組は競争均衡

$\Leftrightarrow X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m)$

価格 p の下で
最も欲しい
商品セット全体

p^* は均衡価格

価格 p^* の下で
皆が最良の
商品セット

例: $p = (60,60,60,60,60)$ のとき
- Aさん: $D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{$商品数2または3$\}$

➔ p と分割 $\{\ \{1\},\ \{2,5\},\ \{3,4\}\ \}$ は競争均衡

効用関数の粗代替性

粗代替性≒ ある商品が値上がりしたら，他の商品の欲しさが高まる

- 定義：効用関数 $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は
  粗代替性(gross-substitutes property)を満たす

  ⇔ $\forall p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$,

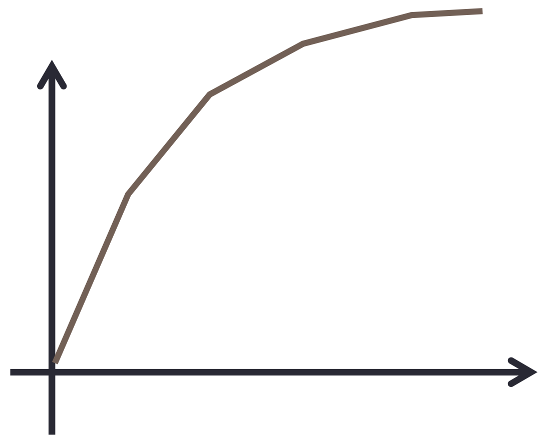
  $\forall X \in D_i(p)$, $\exists Y \in D_i(q)$

  s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$$D_i(p) \equiv \arg\max\{f_i(S) - \sum_{i \in S} p_i \mid S \subseteq N\}$$

粗代替性を満たす効用関数の例

① ② ③ ④ ⑤



- ①を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)
- 商品セット(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の
  一番良い商品にのみ依存 (unit-demand)
  {①, ②, ③}➔満足度70, {③, ④, ⑤}➔満足度100
- 商品数依存 (symmetric & concave)
  (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

効用関数の粗代替性

粗代替性≒ ある商品が値上がりしたら，他の商品の欲しさが高まる

- 定義：効用関数 f_i: $2^N \to \mathbb{Z}_+$は
  粗代替性(gross-substitutes property)を満たす

$\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$,

$\forall X \in D_i(p)$, $\exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$D_i(p) \equiv \arg\max\{f_i(S) - \sum_{i \in S} p_i \mid S \subseteq N\}$

定理[Kelso-Crawford(1982), et al.]：
f_i は粗代替性を満たす ➔ 競争均衡が存在

定理[藤重-Yang03]：
f_i は粗代替性を満たす $\Leftrightarrow$ f_i はM♮凹関数 ➔ 離散凸解析

反復オークション（Iterative Auction）

- 均衡価格（および配分）を求めるためのプロトコル（アルゴリズム）
  - オークション主催者は繰り返し価格を更新
  - 参加者は要求された情報を提示.
  - ただし，効用関数の情報は陽に公開しない

Step 0. initial prices $p = (p_1, \ldots, p_n)$
Step 1. bidder reports all desired item sets in $D_i(p)$
Step 2. If ∃ partition $(S_1^*, S_2^*, \ldots, S_m^*)$ s.t. $S_i^* \in D_i(p)$
➔ stop (p is equibiruim prices)
Step 3. update p. Go to Step 1.

需要大➔価格を上げる
需要小➔価格を下げる

ascending auction: p が単調非減少

Lyapunov 関数 (Ausubel 2006)

$$L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$$

$$V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$$

性質: (i) L は劣モジュラ $L(p) + L(q) \geq L(p \vee q) + L(p \wedge q)$

(ii) p は L の最小解 ←→ p: 均衡価格

(iii) L は整数最小解をもつ

p は L の最小解 ←→ **0** は Lの劣微分に含まれる

L の劣微分 $= \mathbf{1} + \sum_i (V_i(p)$の劣勾配)

$= \mathbf{1} - \sum_i D_i(p)$

←→ $\exists X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1, \dots, m)$

供給と
需要の差

Ausubel, L. M.　(2006): An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities. Amer. Econ. Rev. , 96, 602--629.

Lyapunov 関数 (Ausubel 2006)

$$L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$$

$$V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$$

性質: (i) L は劣モジュラ $L(p) + L(q) \geq L(p \vee q) + L(p \wedge q)$

(ii) p は L の最小解 ←→ p: 均衡価格

(iii) L は整数最小解をもつ

Ascending Auction

Step 0: $p :=$ sufficiently small integral vector (e.g., **0**)

Step 1: find $X \subseteq N$ minimizing $L(p + e_X)$ using $D_i(p)$

Step 2: $L(p + e_X) \geq L(p)$ → stop (p is equilibrium)

Step 3: $p := p + e_X$, Go to Step 1

$$e_X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ausubel, L. M. (2006): An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities. Amer. Econ. Rev. , 96, 602--629.

離散凸解析　(Murota 1996)

2種類の離散凸性:

M♮-convex / L♮-convex

離散ルジャンドル変換による共役性

発表の概要

- Ausubel (2006)の複数財に対するAscending Auctionを
  離散凸解析の視点から理解
  - 効用関数　の　粗代替性　＝　M♮凹性
  - 間接効用関数　＝　L♮凸関数 (共役性)
  - Lyapunov 関数　の最小化　＝　L♮凸関数　の最小化
  - オークション　＝　L♮凸関数最小化アルゴリズム

主結果:

- 種々の型のオークションの提案
  (English, Dutch, English-Dutch, Greedy)
- オークションの反復回数解析

M$^\natural$-convex Function (Exchange Axiom)

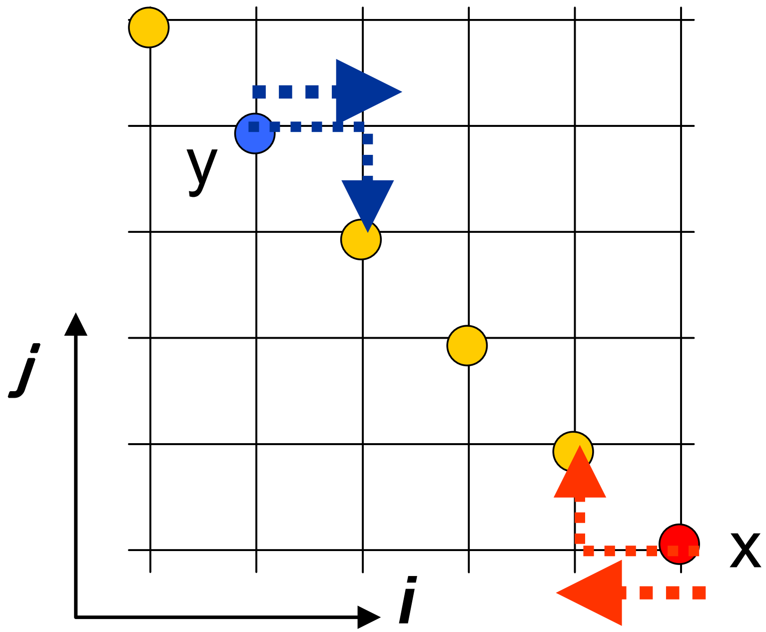
M$^\natural$-convex fn: (Murota-Shioura 99)

Def: $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is M$^\natural$-convex $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \forall i : x(i) > y(i)$:

(i) $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i) + f(y + \chi_i)$, or

(ii) $\exists j : x(j) < y(j)$ s.t. $f(x) + f(y) \geq f\left(x - \chi_i + \chi_j\right) + f(y + \chi_i - \chi_j)$



variant of M-convex (Murota 96)

L♮-convex Function

Prop: Continuous fn $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is convex

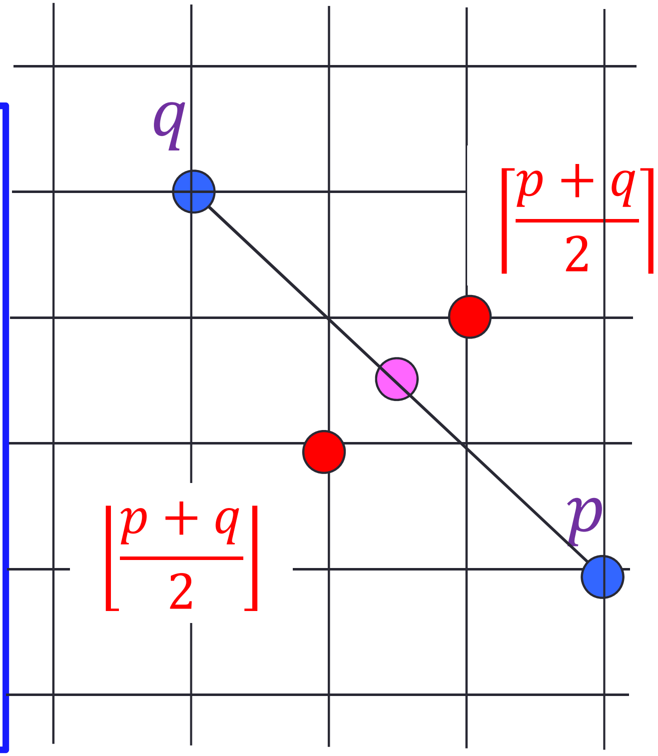
⟺ mid-point convex: $\forall p, q \in \mathbb{R}^n,\ \ g(p) + g(q) \geq 2g\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Def: $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ is L♮-convex

⟺ discrete mid-point convex:

$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n,$

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$$



離散凸解析によるAscending Auctionの解析

定理[藤重-Yang03]：
f_i は粗代替性を満たす ⇔ f_i はM♮凹関数

⇩ 共役性定理

定理: Lyapunov 関数 --- L♮-convex $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

Ascending Auction --- L♮-convex 関数最小化の最急降下法

- 反復回数の既存のバウンド: Murota (2003), Kolmogorov-Shioura (2009)
- 解析の改善 ➔ 最急降下法の厳密なバウンド

定理: $\min\left\{ \|p^* - p_0\|_\infty \;\middle|\; p^*\text{: integer equil., } p^* \geq p_0 \right\}$

➔ trajectory of p --- 均衡への「最短路」

Lyapunov 関数 (Ausubel 2006)

$$L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$$

$$V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$$

性質: (i) L は劣モジュラ $L(p) + L(q) \geq L(p \vee q) + L(p \wedge q)$

(ii) p は L の最小解 ←→ p: 均衡価格

(iii) L は整数最小解をもつ

Ascending Auction

Step 0: $p :=$ sufficiently small integral vector (e.g., **0**)

Step 1: find $X \subseteq N$ minimizing $L(p + e_X)$ using $D_i(p)$

Step 2: $L(p + e_X) \geq L(p)$ ➔ stop (p is equilibrium)

Step 3: $p := p + e_X$, Go to Step 1

$$e_X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ausubel, L. M. (2006): An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities. Amer. Econ. Rev. , 96, 602--629.

その他のオークションアルゴリズム

- Ascending Auction (English)
- Descending Auction (Dutch)
- Greedy Auction
- Two-Phase Auction (English-Dutch)

Greedy Auction

Step 0: $p :=$ any integral vector

Step 1: find $\sigma \in \{+1, -1\}$ and $X \subseteq N$ minimizing $L(p + \sigma e_X)$

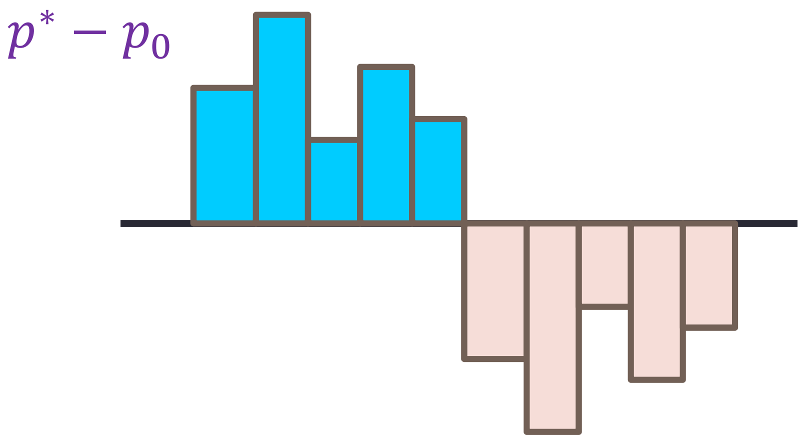
Step 2: $L(p + \sigma e_X) \geq L(p)$ ➔ stop (p is equilibrium)

Step 3: $p := p + \sigma e_X$, Go to Step 1

Thm: tight bound $\min\left\{\left\|p^* - p_0\right\|_\infty^+ + \left\|p^* - p_0\right\|_\infty^- \,\middle|\, p^*: \text{int. equil.}\right\}$

$$\left\|p^* - p_0\right\|_\infty^+ = \max\{0, \max(p^*(i) - p_0(i) \mid i \in N)\}$$

- merit
  - any initial vector can be used
  - less # of iter.
- demerit
  - non-monotone w.r.t. prices



Two-Phase Auction (English-Dutch)

Ascending
+ Descending

Step 0: $p :=$ any integral vector
Step A1: find $X \subseteq N$ minimizing $L(p+e_X)$
Step A2: $L(p+e_X) \geq L(p) \rightarrow$ go to Step D1
Step A3: $p := p + e_X$, Go to Step A1
Step D1: find $Y \subseteq N$ minimizing $L(p-e_Y)$
Step D2: $L(p-e_Y) \geq L(p) \rightarrow$ stop (p is equilibrium)
Step D3: $p := p - e_Y$, Go to Step D1

- merit
  - any initial vector can be used
  - almost monotone w.r.t. prices
- demerit
  - much more iterations than Greedy

Thm: # iters $\leqq$ 3 × (# iters of Greedy)

Andersson & Erlanson (2013) との関係

- Andersson, T., Erlanson, A. (2013):
  Multi-item Vickrey-English-Dutch auctions.
  Games Econ. Behav., 81, 116-129

gross subst.
valuation
の特殊ケース

- unit-demand auction: 一番良い item 一つだけを選択
- iterative auction の反復回数に注目
  - 既存のアルゴリズム：反復回数大
    English 型(Demange et al. 1986, Mo et al. 1988)
    Dutch 型(Mishra & Parkes 2009)
- English-Dutch 型の iter. auction を提案
  反復回数の上界値(理論値)，数値実験による評価

Andersson & Erlanson (2013) との関係：我々の研究成果

- 既存のアルゴリズム：

    English 型(Demange et al. 1986)

    Dutch 型(Mishra & Parkes 2009)

- English-Dutch 型(Andersson & Erlanson 2013)

前出のiter. auctionを特殊化したものに一致

既存：over-demand, under-demand の用語で記述

➔ Lyapunov fn を使って書き換え可能

- 正確な反復回数に関する我々の結果

➔ English-Dutch型に対する結果(Andersson & Erlanson 2013)

発表の概要

- Ausubel (2006)の Ascending Auction を離散凸解析の視点から理解
  - 効用関数　の　粗代替性　＝　M♮凹性
  - 間接効用関数　＝　L♮凸関数 (共役性)
  - Lyapunov 関数　の最小化　＝　L♮凸関数　の最小化
  - オークション　＝　L♮凸関数最小化アルゴリズム

- 種々の型のオークションの提案
  (English, Dutch, English-Dutch, Greedy)
- オークションの反復回数解析