混合行列の概念

室田 一雄

東京大学 数理情報学専攻

081117aiharaHybrid

システム解析 —— 混合行列 —— マトロイド

ハイブリッドシステム：

離散 vs 連続，　構造 vs 数値，　定性 vs 定量

I. 混合行列の概念 —— 物理的/工学的考察

保存則と構成則 $\Rightarrow$ ２種類の数

混合行列(mixed matrix)，混合多項式行列

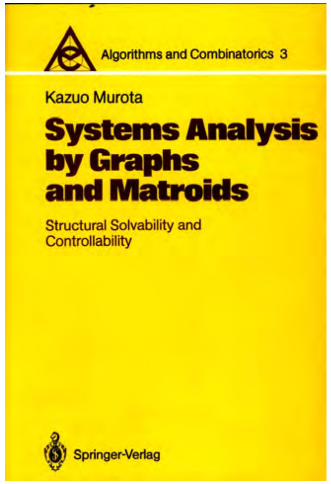
次元解析

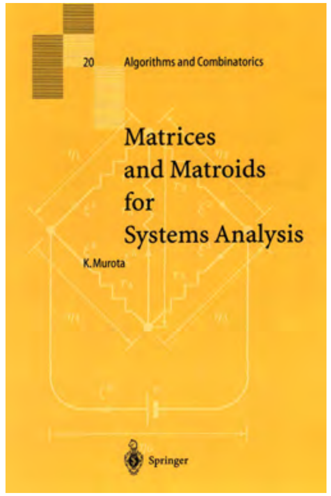
II. 混合行列の理論 —— 数学的性質

階数公式	双対定理
階層分解(CCF)	Jordan-Hölder型分解
行列式の次数	付値マトロイド → 離散凸解析

参考文献

- 混合行列の話，「数理工学への誘い」，日本評論社，139–149，2002
- 離散システムの不変な階層構造を求めて—グラフからマトロイドへ，応用数理，1，30–48，1991
- マトロイドとシステム解析「離散構造とアルゴリズムI」(藤重悟 編)，近代科学社，第2章，57–109，1992



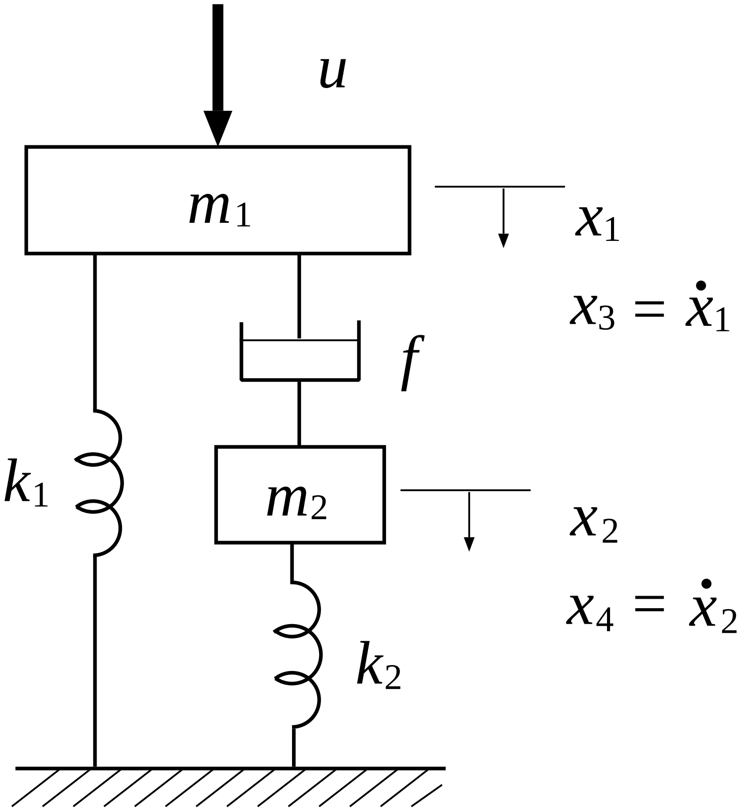


- Systems Analysis by Graphs and Matroids, Springer, 1987
- Matrices and Matroids for Systems Analysis, Springer, 2000

I.
混合行列の概念

—— 物理的／工学的考察

簡単な力学系



変数

$x_1(t)$ ： 質点m_1の変位
$x_2(t)$ ： 質点m_2の変位
$x_3(t)$ ： 質点m_1の速度
$x_4(t)$ ： 質点m_2の速度

$x_5(t)$ ： ダンパーによる力
$x_6(t)$ ： 質点の相対速度

方程式

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_4$$
$$m_1 \dot{x}_3 = -k_1 x_1 - x_5 + u$$
$$m_2 \dot{x}_4 = -k_2 x_2 + x_5$$
$$x_5 = f x_6$$
$$x_6 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ (= x_3 - x_4)$$

システムの記述法

Standard form: $\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t)$ コンパクト，大域情報

$$\hat{A} = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & 0 & -f/m_1 & f/m_1 \\ 0 & -k_2/m_2 & f/m_2 & -f/m_2 \end{array} \quad \hat{B} = \begin{array}{c} u \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{array}$$

Descriptor form: $F\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 自然，局所情報

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

定数と物理パラメータの分離

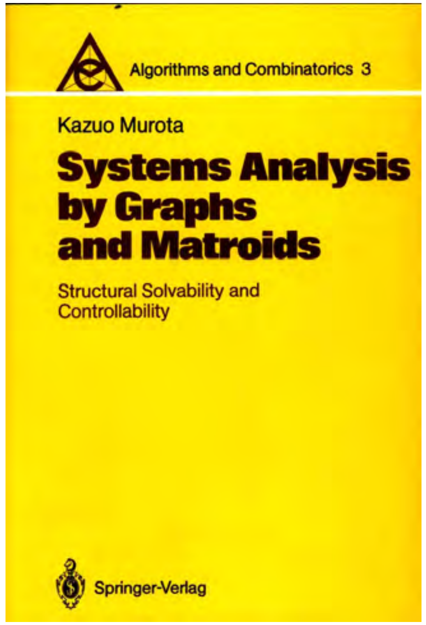
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = Q + T$　　**混合行列**

- Q の要素は有理数
- T の非零要素は代数的独立

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T}$$

システムの構造：接続関係 vs 数値情報



ゼロ
非ゼロ

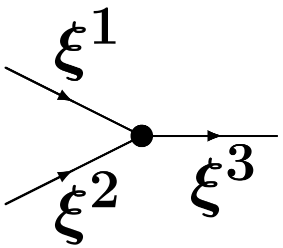
$\Longrightarrow$ **グラフ理論による手法**

ゼロ
非ゼロ

定数（誤差を含まない正確な数）
パラメータ（誤差を含む公称値）

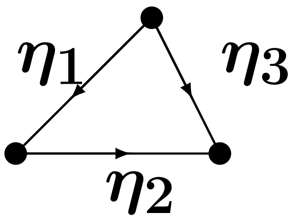
$\Longrightarrow$ **マトロイド理論による手法**

定数 (Accurate Numbers)



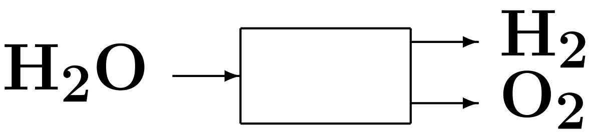
KCL

$$-1 \cdot \xi^1 - 1 \cdot \xi^2 + 1 \cdot \xi^3 = 0$$



KVL

$$-1 \cdot \eta_1 - 1 \cdot \eta_2 + 1 \cdot \eta_3 = 0$$



$$2 \cdot H_2O = 2 \cdot H_2 + 1 \cdot O_2$$

Stoichiometry

Velocity − Displacement: $v = 1 \cdot \dot{x} \ (= s \cdot x)$

Current − Charge: $\xi = 1 \cdot \dot{Q} \ (= s \cdot Q)$

ラプラス変換（周波数表現）

$$D(s) = [A - sF \mid B]$$

$$D(s) = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & u \\ \hline -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & -sm_1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & 0 & -sm_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & f & 0 \\ -s & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

sを変数とする多項式行列

物理パラメータ(m_i, k_i, f)を含む

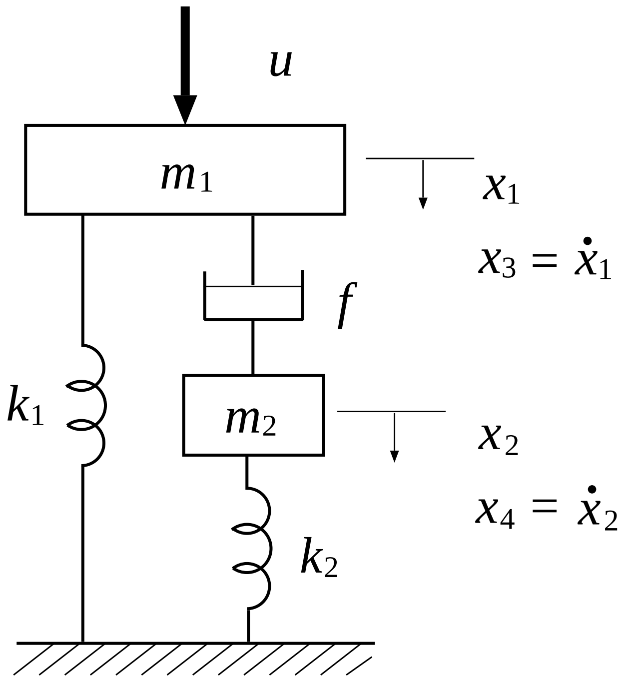
定数と物理パラメータの分離(動的システム)

$D(s) = Q(s) + T(s)$　　混合多項式行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & u \end{array} \\
Q(s) = \left[\begin{array}{cccccc|c}
-s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-s & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
T(s) = \left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_1 & 0 & -sm_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_2 & 0 & -sm_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

物理次元



変数

$x_1(t)$:	質点m_1の変位	L
$x_2(t)$:	質点m_2の変位	L
$x_3(t)$:	質点m_1の速度	$T^{-1}L$
$x_4(t)$:	質点m_2の速度	$T^{-1}L$
$x_5(t)$:	ダンパーによる力	$T^{-2}LM$
$x_6(t)$:	質点の相対速度	$T^{-1}L$

方程式

$$\dot{x}_1 = x_3 \qquad T^{-1}L$$
$$\dot{x}_2 = x_4 \qquad T^{-1}L$$
$$m_1\dot{x}_3 = -k_1x_1 - x_5 + u \qquad T^{-2}LM$$
$$m_2\dot{x}_4 = -k_2x_2 + x_5 \qquad T^{-2}LM$$
$$x_5 = fx_6 \qquad T^{-2}LM$$
$$x_6 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ (= x_3 - x_4) \qquad T^{-1}L$$

次元解析(物理次元の整合性)

[第 i 行の次元] $=$ [第 (i,j) 要素の次元] $\times$ [第 j 列の次元]

	L		$T^{-1}L$		$T^{-2}LM$		$T^{-2}LM$
		L		$T^{-1}L$		$T^{-1}L$	
$T^{-1}L$	$-\dot{x}_1$		x_3				
$T^{-1}L$		$-\dot{x}_2$		x_4			
$T^{-2}LM$	$-k_1x_1$		$-m_1\dot{x}_3$		$-x_5$		$+u$
$T^{-2}LM$		$-k_2x_2$		$-m_2\dot{x}_4$	$+x_5$		
$T^{-2}LM$					$-x_5$	fx_6	
$T^{-1}L$	$\dot{x}_1$	$-\dot{x}_2$				$-x_6$	

m_1, m_2: M, k_1, k_2: $T^{-2}M$, f: $T^{-1}M$

第 i 行の時間次元 T^{-r_i} 第 j 列の時間次元 T^{-c_j}

定数部分 $Q(s)$ の次元解析

1．　[第i行の次元] $=$ [第(i,j)要素の次元]$\times$[第j列の次元]

　　第i行$=T^{-r_i}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　第j列$=T^{-c_j}$

2．　非零定数は無次元量，　$s \ \left(= \dfrac{\mathrm{d}}{dt}\right)$ の次元は T^{-1}

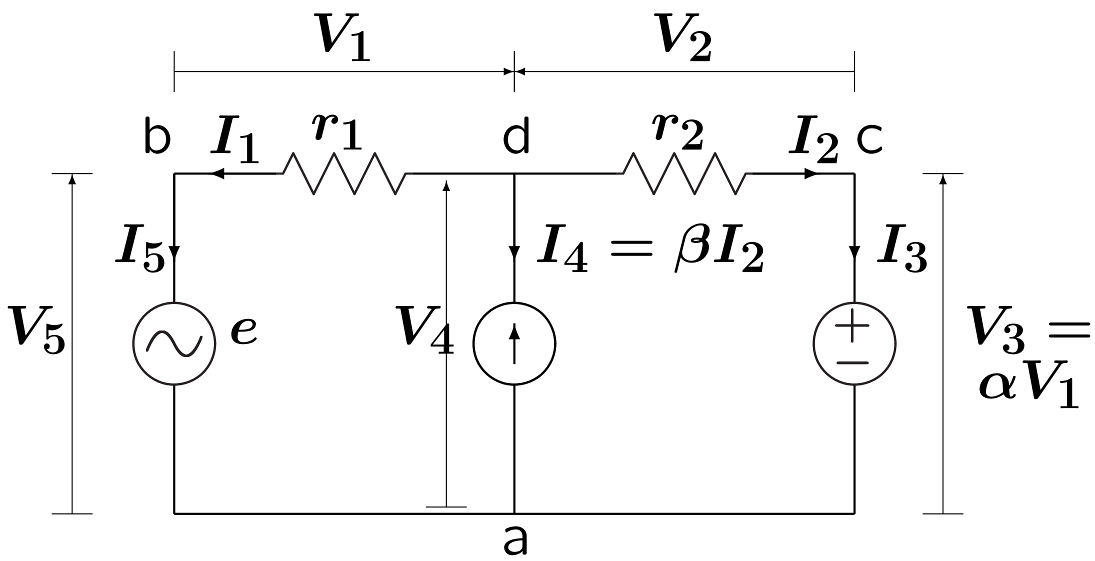
$$\Rightarrow \boxed{Q(s) = \mathrm{diag}\,[s^{r_1}, \ldots, s^{r_m}] \cdot Q(1) \cdot \mathrm{diag}\,[s^{-c_1}, \ldots, s^{-c_n}]}$$

$\Leftrightarrow$ 行列$Q(s)$の任意の小行列式は変数sの単項式

$$Q(s) = \left[\begin{array}{cccccc|c} -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -s & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$r_1 = r_2 = 1, \ r_3 = r_4 = r_5 = 2, \ r_6 = 1;$
$c_1 = c_2 = 0, \ c_3 = c_4 = 1, \ c_5 = 2, \ c_6 = 1, \ c_7 = 2$

電気回路



構成方程式

オーム抵抗　$V_1 = r_1 I_1$

$V_2 = r_2 I_2$

制御電流源　$I_4 = \beta I_2$

制御電圧源　$V_3 = \alpha V_1$

独立電圧源　$V_5 = -e$

構造方程式

電流保存: $I_3 + I_4 + I_5 = 0, \quad I_1 - I_5 = 0, \quad I_2 - I_3 = 0$

電圧保存: $V_1 - V_4 + V_5 = 0, \quad V_2 + V_3 - V_4 = 0$

電気回路の記述と混合行列

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
r_1 & & & & & -1 & & & & \\
 & r_2 & & & & & -1 & & & \\
 & & 0 & & & \alpha & & -1 & & \\
 & \beta & & -1 & & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & & & -1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \hline V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e
\end{array}\right]
$$

$$
Q =
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & & & & & -1 & & & & \\
 & 0 & & & & & -1 & & & \\
 & & 0 & & & 0 & & -1 & & \\
 & 0 & & -1 & & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & & & -1
\end{array}\right],
T =
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
r_1 & & & & & 0 & & & & \\
 & r_2 & & & & & 0 & & & \\
 & & 0 & & & \alpha & & 0 & & \\
 & \beta & & 0 & & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & & & 0
\end{array}\right]
$$

II.

混合行列の理論

—— 数学的性質

混合行列の定義

体 $K \subseteq F$　　　　　　（例：有理数全体 $\subseteq$ 実数全体）

A が (K, F) に関する $\boxed{\text{混合行列}}$

$\iff \quad A = Q + T$

（Q）Q は K の元を要素とする行列

（T）T は F の元を要素とする行列で，

　　その非ゼロ要素の全体は K 上で代数的独立

$\boxed{\text{層混合行列}}$　$A = \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ T \end{bmatrix}$

(layered mixed matrix)

階数公式（max型）

混合行列 $A = Q + T$ に対して　　（R：行集合，C：列集合）

$$\operatorname{rank} A = \max_{I \subseteq R, J \subseteq C} \{ \underline{\operatorname{rank} Q[I, J] + \operatorname{rank} T[R \setminus I, C \setminus J]} \}$$

$$\uparrow \quad f(I, J)$$

1．最大値を与える (I, J) を効率良く（多項式時間で）見出す
　アルゴリズムを与えている訳ではない

2．任意の (I, J) に対して $f(I, J)$ の値を計算できるので，
　「ランク $\geq f(I, J)$」を効率良く確認できる

3．「ランク $\leq$ 指定された値」を効率良く確認する手段は与えない

階数公式（min型）

混合行列 $A = Q + T$ に対して　　（R：行集合，C：列集合）

$$\mathrm{rank}\, A = |R| + |C| + \min_{I \subseteq R, J \subseteq C} \{\mathrm{rank}\, Q[I,J] - |I| - |J| \mid \mathrm{rank}\, T[I,J] = 0\}$$

1．例題の電気回路の行列 A に対しては，

　　$I = R$, $J = \emptyset$　が右辺の最小値10を与える

2．公式の本質は，離散凸関数に関する双対性

正準形（階層構造の抽出）

$$A = \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix}$$ に対し， 許容変換 $$P_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} S & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} P_{\mathrm{c}}$$

(S：正則行列， P_{r}，P_{c}：置換行列)

によるブロック三角化(Combinatorial Canonical Form)

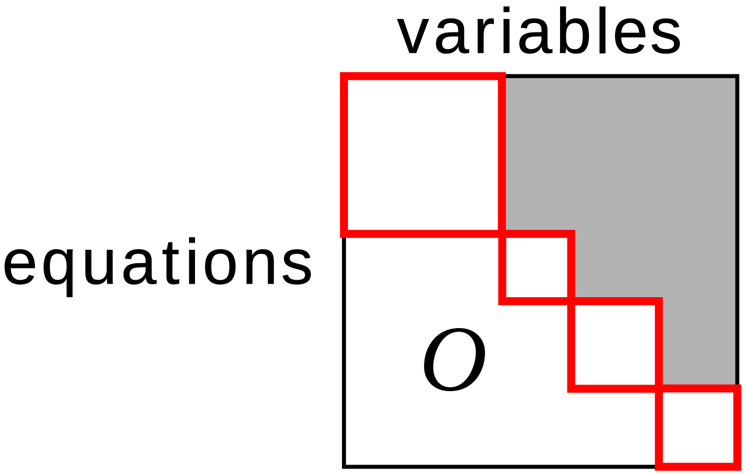
電気回路の方程式では

$$P_{\mathrm{r}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline S_{\mathrm{KCL}} & O & O \\ \hline O & S_{\mathrm{KVL}} & O \\ \hline O & O & I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{K C L} & O \\ \hline O & \text{K V L} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{\text{constitutive eqns}} \\ \hline \end{array} P_{\mathrm{c}}$$

(S_{KCL}，S_{KVL}：正則，P_{r}，P_{c}：置換)

Block-Triangularization

Linear/nonlinear eq.



Decomposition into Subproblems

- Solvability of each subproblem
- Hierarchy among subproblems

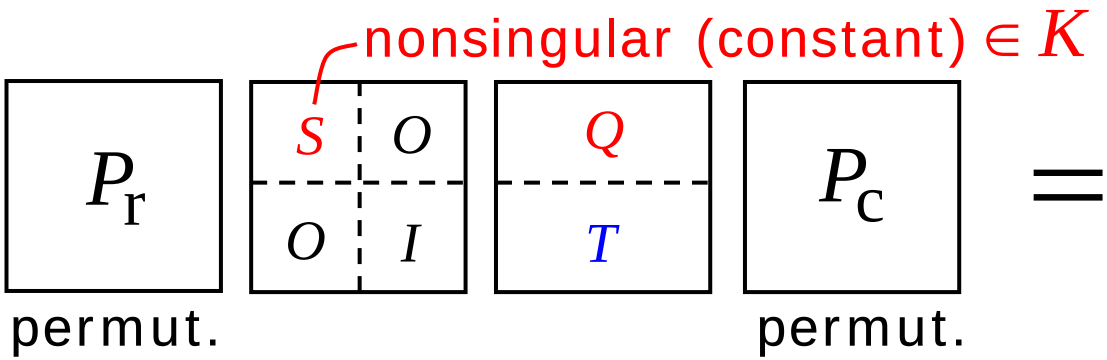
Significance of decomposition — Uniqueness

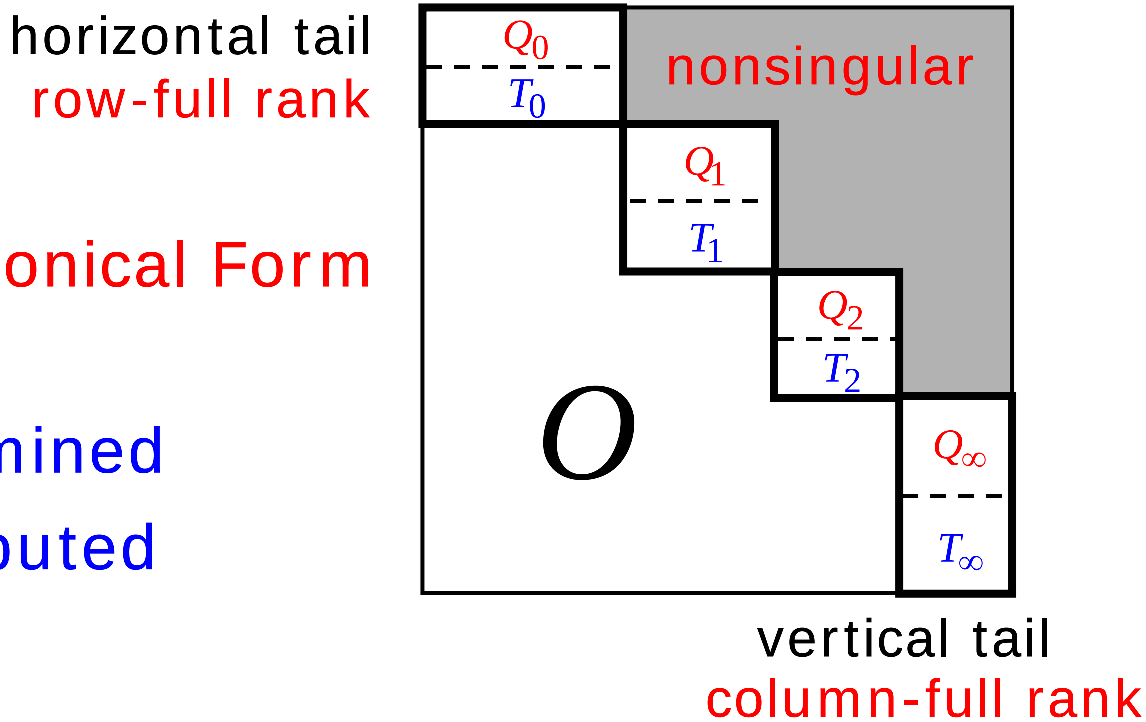
Algorithm for decomposition

→ Combinatorial Matrix Theory

Combinatorial Canonical Form of LM-matrix

Admissible transformation





Combinatorial Canonical Form
(CCF)

- Uniquely determined
- Efficiently computed