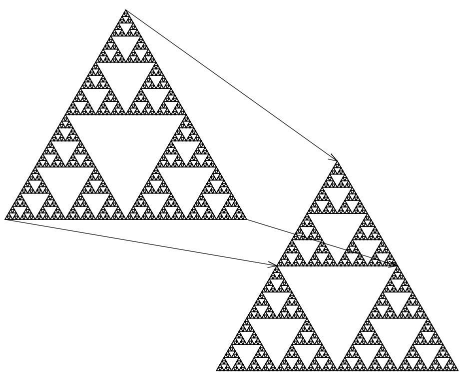
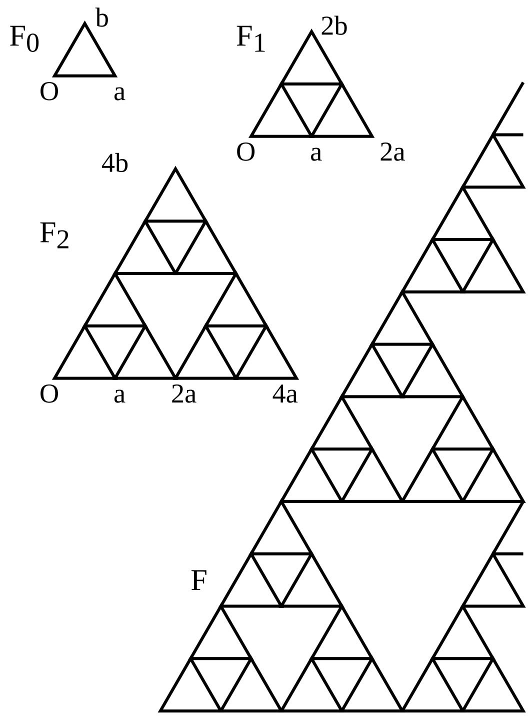
フラクタル上の数理モデル
— パーコレーション，自己回避ウォーク

本田勝也先生に捧ぐ

首都大理工　服部久美子

1　はじめに．





左の図は Sierpinski gasket とよばれる**フラクタル**図形である．正三角形を 4 つの小三角形に等分割し，真ん中の下向き小三角形を取り除く．残った 3 つの上向き小三角形に同じ操作を施す．これを無限に繰り返すと Sierpinski gasket が得られる．無限の操作の結果，図のように一部を取り出して拡大すると，もとの図形とぴったり一致する．この性質を**自己相似性**という（[2], [3]）．フラクタルは比較的新しい分野である．1970 年代に Benoit Mandelbrot が，分岐点だらけ，いたるところ微分不可能など，病的・例外的とみられていた図形のいくつかに共通する自己相似性に着目し，フラクタル (fractal) という名を与え数学的対象としての地位を主張した（[1]）．その後現在に至るまで，数学のみならず物理，生物，化学，工学など広範な分野で，フラクタルに関連した研究が大きく進展している．確率論の分野でもフラクタル上の確率過程（特に拡散過程）はひとつの流行にさえなった．フラクタル上の拡散過程に関しては，すでに統計数学分科会で特別講演を含む多くの講演がなされているので，ここでは，地味でいて独自の面白さと難しさをもつフラクタル上の 2 つの数理モデル，パーコレーションと自己回避ウォークに焦点を当てて紹介していきたい．（フラクタル上の解析に関しては例えば [8], [9] 参照.）

ここで扱う空間は，**フラクタル格子**（フラクタル状のグラフ）である．一番右の図の Sierpinski gasket 格子がその例である．これは長さ 1 の辺を最小単位としているグラフで，

Sierpinski gasket のように無限に細かい構造はもたないが，そのかわり左下の端点から離れるほど大きい穴が開いている（左下の端点から 2^n ほど離れたあたりに一辺 2^n の下向き正三角形の穴が開いている）．この格子は，すべての一辺 2 の上向き三角形の中の構造を消し去り，全体を 1/2 に縮小するともとの図形に戻る，という意味での「自己相似性」をもっている．

パーコレーションは，たとえば，金属と非金属の混合体において金属の割合を増やしていくとあるところで電流が通るようになるような現象の数理モデルである．d 次元正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上の**ボンド・パーコレーション**は次のようなモデルである．頂点集合 $\mathbb{Z}^d$ と，隣り合う頂点を結ぶ長さ 1 の辺全体の集合からなるグラフを考える．各辺が，独立に確率 p でつながっていて，確率 $1-p$ で切れているとする．このとき，無限に大きいつながったクラスターはできるだろうか．実際，$d \geqq 2$ では確率 p を大きくしていくとある値 $p = p_c$ $(0 < p_c < 1)$ を境に突然無限クラスターが出現する．

一般に，系のマクロな状態が，パラメータのある値を境にして劇的に変わるとき，系は**相転移 (phase transition)** を起こすという．物理学者は，パラメータの値がその境の値（**臨界点**）に近いとき，系の状態をあらわすいくつかの関数の振舞い（**臨界現象**）は，モデルの詳細（例えば，平面内の場合は，正方格子か三角格子か）によらない（**普遍性**）と信じている．パーコレーションは，各辺が独立に確率 p でつながるという単純なモデルなので，相転移の臨界点付近の挙動を実際に計算できそうなモデルとして注目されていた．

正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のボンド・パーコレーションに関しては，臨界確率の一意性，無限クラスターの一意性など，様々な結果が得られている．Werner が 2006 年にフィールズ賞を受賞した Schramm Loewner evolution (SLE) の仕事は 2 次元の三角格子上のサイト・パーコレーション（後述）に関連している．しかし，単純なモデルという期待に反して未解決の問題も多く残されている．

ここでは，フラクタル格子上のボンド・パーコレーションについて得られている結果を紹介する．Sierpinski gasket 格子上のパーコレーションは，相転移は起こらないが，自己相似性に由来する **recursion relation** に基づいて相関距離，平均クラスターサイズなどが調べられている．Sierpinski carpet タイプ，Menger sponge タイプのフラクタル格子については，相転移の起こる十分条件が得られている．

自己回避ウォークとは，一度通った点には二度と戻れない，という制約つきのウォークである．d 次元正方格子 $\mathbb{Z}^d$ を例にとって，(単純) ランダムウォークとの違いを述べよう．ランダムウォークが最初原点にいたとすると，1 歩目で隣の点（距離 1 だけ離れた点）へ等確率 $1/(2d)$ で移る．同様に，$(n+1)$ 歩目で n 歩目のの位置の隣に等確率で移る．このとき，$(n-1)$ 歩までの振舞いは忘れてよい．このような性質を**マルコフ性**といい，マルコフ性をもつ確率過程については多くの研究がなされてきた．これに対して，$(n+1)$ 歩目の位置の予測に 1 歩目からの振舞いが影響するものを**非マルコフ**確率過程という．自己回避ウォークは，次々隣の点に移っていくのはランダムウォークと共通であるが，同じ点に戻ることが禁止されているため，過去を記憶していなければならない．その意味で，すでに多くの蓄積があるマルコフ過程の解析方法が全く使えない．

1 次元の自己回避ウォークは 1 方向にしか進めず自明なので，以下，$d \geqq 2$ とする．(述べるのが）もっとも簡単な「原点を出発点とする自己回避ウォークの n 歩までの歩き方は何通りあるか」という問題でさえ超難問である．n 歩の自己回避ウォークがそのまま $(n+1)$ 歩まで伸ばせるとは限らない．n 歩目で隣の点がすべて訪れたことのある点，という袋小路に入り込むこともあるからだ．ランダムウォークなら n 歩の歩き方は $(2d)^n$ 通りである．また，n 歩目の位置と出発点との距離の 2 乗の期待値（n 歩の歩き方に等確率を与えるとする）は n とともに発散することは想像できるが，漸近的な形はどうなるか．ランダムウォークなら期待値は（漸近形でなく）ちょうど n である．

5 次元以上の自己回避ウォークの漸近的振舞いは Hara-Slade によって解決されている．次元の高い空間ではそもそもランダムウォーク自体が「大きなスケールでの自己交差」を漸近的に起こさないので（行ってすぐ戻るような局所的な自己交差は起こるが），自己回避ウォークと同様の漸近的振舞いを示す．低次元が難しい．$2, 3, 4$ 次元ではいまだに予想のままである．自明な 1 次元と難問の 2 次元の中間次元の空間としてフラクタルがある．Sierpinski gasket のハウスドルフ次元は $\log 3/\log 2 = 1.58\ldots$ である．この空間でなら自明でない厳密

な結果が得られる．空間の自己相似性を利用して，異なるスケールでみた自己回避ウォーク間の関係を反映する **recursion relation** が鍵である．

1980 年代にフラクタル上のパーコレーション，自己回避ウォーク，イジング・モデルなどを初めとする物理の論文が多く書かれた．物理学者の直観に数学として厳密な証明を与えることは容易ではないが，数学者の解くべき問題が多くありそうである．

次の第 2 節ではパーコレーションについて，第 3 節では自己回避ウォークについて紹介する．予備知識は仮定していない．それぞれ，まず $\mathbb{Z}^d$ を例にとって，どのような問題があるかを示し，フラクタルの場合に数学として得られている結果を紹介する．第 4 節では，他のモデルと残された問題に触れる．

2 Percolation.

2.1 正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のボンド・パーコレーション．

パーコレーションに関する基本的な問題を明らかにするために，まず正方格子上のボンド・パーコレーションから始めよう．頂点集合 $V = \mathbb{Z}^d$, $E =$ ［$\mathbb{Z}^d$ の隣りあう点をつなぐ長さ 1 の辺の集合］とし，グラフ (V, E) の各辺 (bond) が，独立に確率 p で **open（つながっている）**，確率 $1-p$ で **closed（切れている）** とする．このときの $\Omega = \{\text{open, closed}\}^E$ 上の確率測度を P_p とする．$\omega \in \Omega$ を選ぶと E 上の open, closed の配置が決まったことになる．C を原点から open bond に沿って到達できる点の集合（**open bond のクラスター**，または単に**クラスター**）とする．$|C| = |C|(\omega)$ を C に属する点の数（確率変数）とする．**浸透確率 (percolation probability)** を

$$\theta(p) = P_p[|C| = \infty]$$

（原点を含む無限大の open bond のクラスターができる確率）で定義すると，明らかに $\theta(0) = 0,\ \theta(1) = 1$ であり，$\theta(p)$ は p に関して単調である．**臨界確率 (critical probability)** を

$$p_c = \inf\{p \in [0,1] \ : \ \theta(p) > 0\}$$

で定義する．いくつかの基本的な問題と得られている結果を列挙しよう．

問題１：$0 < p_c < 1$ か？（相転移の有無） 1 次元では自明に $p_c(\mathbb{Z}) = 1$（相転移なし），2 次元では $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$（相転移あり）が知られている．一般次元では，$\dfrac{1}{2} = p_c(\mathbb{Z}^2) \geqq p_c(\mathbb{Z}^3) \geqq p_c(\mathbb{Z}^4) \geqq \cdots > 0$, $\quad p_c(\mathbb{Z}^d) \geqq \dfrac{1}{2d-1}$ は容易に得られるが， $d \geqq 3$ に対しては $p_c(\mathbb{Z}^d)$ の厳密な値は得られていない．

問題２：$\theta(p_c) = 0$ か？ $d = 2$ と $d \geqq 19$ の $\mathbb{Z}^d$ では $\theta(p_c) = 0$ が証明されているが，$3 \leqq d \leqq 18$ では未解決である．

問題３：$\theta(p) > 0$ のとき，無限クラスターの個数は？ $\mathbb{Z}^d$ 上では $p > p_c$ のとき，確率 1 で無限クラスターが一意に存在することが証明されている．証明には空間の平行移動不変性を用いる．

第 1 節で，ある種の関数の相転移点付近での振舞いはモデルの詳細によらないことに言及したが，$\theta(p)$ や次に述べる 2 つの関数がその例である．**平均クラスターサイズ (mean cluster size)** を

$$\chi(p) := E_p[|C|]$$

で定義すると，p の関数として単調である．２種類の臨界確率を $p_T = \inf\{p \in [0,1] : \chi(p) = \infty\}$ （$p < p_c$ でも $\chi(p)$ は発散するかもしれない），および $p_H = \inf\{p \in [0,1] : \theta(p) > 0\}$ で定義する．任意の $d \geqq 2$ に対して，$\mathbb{Z}^d$ では $p_T = p_H$ が証明されている（**臨界確率の一意性**）．上ではこれを p_c と書いていた．

連結性関数 (connectivity function) を

$$\tau_p(x,y) := P_p[x \leftrightarrow y]$$

で定義する．ここで $x \leftrightarrow y$ は「x と y が open bond でつながっている」という意味である．

p の関数 $\theta(p)$, $\chi(p)$, $\tau_p(O,x)$ などは，臨界点付近で次のような **power law** に従うと考えられている．

(1) $\theta(p) \sim |p-p_c|^{\beta}, \quad (p \downarrow p_c\ ), \quad \beta > 0$

(2) $\chi(p) \sim |p-p_c|^{-\gamma}, \quad (p \uparrow p_c\ ), \quad \gamma > 0$

(3) $\tau_p(O,x) \sim \exp\{-\dfrac{|x|}{\xi(p)}\}$, $(|x| \to \infty)$ $\qquad \xi(p) \sim |p-p_c|^{-\nu},\ (p \to p_c), \quad \nu > 0$

β, γ, ν などを**臨界指数 (critical exponent)** という．また，$\xi(p)$ を**相関距離 (correlation length)** という．

問題４：漸近形は上のような power law に従うか？臨界指数の値は？　power law は２次元の三角格子上のサイト・パーコレーションと高次元の $\mathbb{Z}^d$ に対してしか証明されていない（それでも，信じられている！）．**サイト・パーコレーション**は辺の代わりに各頂点が独立に確率 p で open，確率 $1-p$ で closed とするものである．距離１だけ離れた open な頂点はつながっているとみなすとクラスターが考えられる．臨界指数はモデルの詳細によらないと思われている．例えば，平面のボンド・パーコレーションとサイト・パーコレーション，正方格子と三角格子で等しい値になると信じられている．$d \geqq 19$ で，$\beta = 1,\ \gamma = 1,\ \nu = 1/2$ が証明されている．

$\mathbb{Z}^d$ のパーコレーションについては，[4], [6]，およびその中の文献を参照されたい．

2.2　２次元 Sierpinski gasket 格子上のパーコレーション．

まず，Sierpinski gasket 格子を定義しよう．$O=(0,0), a=(1,0), b=(1/2,\sqrt{3}/2)$ とし，F_0 を $\triangle Oab$ の周上の点の集合，$V_0 = \{O,a,b\}$, $a_n = 2^n a = (2^n, 0)$, $b_n = 2^n b = (2^{n-1}, 2^{n-1}\sqrt{3})$ とする．V_n, F_n を次のように帰納的に定義する．$n = 0,1,2,\ldots$ に対して

$$V_{n+1} = V_n \cup (V_n + a_n) \cup (V_n + b_n), \quad F_{n+1} = F_n \cup (F_n + a_n) \cup (F_n + b_n)$$

と定義する．ここで，$A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対し $A + x = \{z + x : z \in A\}$ と記した．

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

V の点を結ぶ F 上の長さ１の辺全体の集合を E とするとき，グラフ $G=(V,E)$ が **Sierpinski gasket 格子**である．

このグラフに関しては，$p_c(G) = 1$，すなわち相転移が起こらないことが早くから知られていた．このことは次のように考えるとすぐわかる．$\triangle Oa_nb_n$ の頂点 a_n, b_n から外に向かって出ている 4 本の辺が closed ならば，O を含む無限 open cluster は存在し得ない．この事象は各 n に対して独立であるから，

$$P_p[\text{ 原点を含む無限クラスターが存在する }]$$

$$\leqq P_p[\bigcap_{i=1}^{n}\{\ a_i, b_i \text{から外に向かって出ている 4 本の辺のどれかは open }\}] = (1-(1-p)^4)^n \to 0$$

となる．Shinoda（[11]）が相関距離と平均クラスターサイズの漸近的振舞いに関する結果を得ている．すなわち，**相関距離 (correlation length)**

$$\xi(p) := \lim_{n\to\infty}\{-\frac{1}{2^n}\log P_p(O\leftrightarrow a_n)\}^{-1}$$

の存在と $(P_p(O\leftrightarrow a)\sim e^{-\frac{2^n}{\xi(p)}}$ ということ）

$$\lim_{p\to 1}\frac{-\log\xi(p)}{\log(1-p)}=\infty.$$

$$\lim_{p\to 1}\frac{\log(\log\xi(p))}{\log(1-p)}=-2$$

を示している．これは物理の文献にある予想（[10]）$\xi\sim\exp(\frac{1}{4}\log 2/q^2)$ $(q=1-p)$ を厳密に示したものである．**平均クラスターサイズ**については以下のような結果を得ている．

$$E_p[\ |C|^k\ ]\sim\{\xi(p)\}^{Dk},\quad k\geqq 1,\quad D=\frac{\log 3}{\log 2}.$$

$$\Phi_n(p) := P_p(O\leftrightarrow a_n \text{ in } \Delta Oa_nb_n),$$

$$\Theta_n(p) := P_p(O\leftrightarrow a_n \text{ and } O\leftrightarrow b_n \text{ in } \Delta Oa_nb_n)$$

とおいて，$\Delta Oa_{n+1}b_{n+1}$ 内のつながり方を，一段階小さい 3 つの三角形の中のつながり方に分解して考えると，次の **recursion relation** が得られる．上のような厳密な結果は，この recursion relation を解析することによって得られる．

$$\Phi_0(p) := p+p^2-p^3.$$

$$\Theta_0(p) := 3p^2-2p^3.$$

$$\Phi_{n+1}(p)=(\Phi_n(p))^2+(\Phi_n(p))^3-\Phi_n(p)(\Theta_n(p))^2,$$

$$\Theta_{n+1}(p)=3(\Phi_n(p))^2\Theta_n(p)-2(\Theta_n(p))^3,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

2.3 2 次元 Sierpinski carpet タイプの格子上のパーコレーション.

任意の有限部分集合が，ある数以下の辺を切ることによって，無限部分から切り離せる，という性質をもつフラクタル格子を **finitely ramified** であるという．前節の Sierpinski gasket は，その典型的な例である．任意の有限部分に対して十分大きな n をとれば，$\triangle Oa_nb_n$ の中に含まれるから，a_n, b_n から外に向かって出る 4 本の辺を切ればよい．Sierpinski gasket 格子で相転移が起こらなかったのは，この性質に由来する．

有限部分を切りだすときに，切り取る辺の数が有界でないフラクタル格子を **infinitely ramified** であるという．Sierpinski carpet 格子は infinitely ramified フラクタル格子の例である．まず,「普通の」Sierpinski carpet 格子を定義しよう．$O=(0,0), a=(1,0), b=(1,1), c=(0,1)$ とし，F_0 を正方形 $Oabc$ の周上の点の集合，$V_0=\{O,a,b,c\}$, $a_n=3^na$, $b_n=3^nb$, $c_n=3^nc$ とする．F_1 は，一辺 3 の正方形に，真ん中を空けて F_0 と相似な図形を 8 個詰めたもの（見かけ上は一辺 3 の正方形を 9 等分したものと同じ）とする．F_{n+1} は，一辺 3^{n+1} の正方形に，真ん中を空けて F_n と相似な図形を 8 個詰めたものとし，F_n の頂点集合を G_n とする．$n=1,2,\ldots$ に対して

$$V=\bigcup_{n=0}^{\infty}V_n,\qquad F=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$$

とし，V の点を結ぶ F 上の長さ 1 の bond 全体の集合 E とするとき，グラフ $G = (V, E)$ が **Sierpinski carpet 格子**である

infinite ramified フラクタル格子に対しては，有限個の閉じた式で表される recursion は存在しない．むしろ，空間の平行移動不変性がなく，穴が解析の障害となる．相転移の有無からして問題である．相転移の存在が証明されている 2 次元正方格子も，いわば infinitely ramified フラクタル格子である．パーコレーション的な視点では 1 次元的な finitely ramified フラクタルと，2 次元正方格子の間に位置する infinitely ramified フラクタル格子は，興味深い対象である．

Sierpinski carpet を一般化した **Sierpinski carpet タイプのフラクタル格子**はいろいろ考えられる．Sierpinski carpet 格子を作るときには真ん中に１つ穴を空けたが，他の場所を空けてもよいし，2 つ以上空けてもよい．さらに任意の 3 以上の整数 L に対して，一辺 L の正方形を $L \times L$ 等分してその中の任意の小正方形を穴としたものを基本図形 F_1 に取ってもよい．ただし，連結なグラフのみを考えることにする．

このようなフラクタル格子に関しては，Kumagai, Shinoda, Higuchi-Wu 等の結果がある．Kumagai（[12]）は F_1 が良い対称性を持ち，さらに「ある条件」を満たす Sierpinski carpet タイプの格子に対して，$1/2 < p_T = p_H (:= p_c) < 1$，$p > p_c$ に対して，確率 1 で無限クラスターが一意に存在すること，$\theta(p_c) = 0$（確率 1 で p_c では無限クラスターは存在しないこと）を示した．F_1 として，一辺 5 の正方形の真ん中１つ分だけを空けて 24 個の小正方形を詰めた形のものは，この「条件」を満たすことが容易に確かめられる．普通の Sierpinski carpet 格子が上の「条件」を満たすことは容易にはわからなかったが，それを Higuchi–Wu（[16]）が扱っている．Shinoda（[14]} は，さらに対称性の条件を緩めた Sierpinski carpet タイプの格子に対して相転移を起こす十分条件を示した。carpet タイプだが相転移の起こらない例も挙げている．Murai（[13]）はさらに Menger sponge の一般次元版（d 次元超立方体を積み上げて作る）上で臨界確率 p_c の $d \to \infty$ のときの漸近的な振舞いを得ている．

3　自己回避ウォーク．

3.1　正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上の自己回避ウォーク．

まず正方格子上で自己回避ウォークを例にとり，基本的な問題を 2 つに絞って紹介しよう．$\mathbb{Z}^d$ 上，原点出発の **self-avoiding path (SAP)** を

$$w(i) \in \mathbb{Z}^d,\ w(0) = O,\ \ |w(i+1) - w(i)| = 1,\ \ w(i) \neq w(j),\ (i \neq j),\ \ i, j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

によって定義する．$w(i)$ は i 歩目の位置を表す．c_N を，原点を出発する N **歩の self-avoiding path の数**とする．N 歩の各 SAP に**等確率**を割り当てたものを**自己回避ウォーク（self-avoiding walk, SAW）**とよぶ．原点からの**平均２乗距離**を

$$E^N[\ |w(N)|^2\ ] = \frac{1}{c_N} \sum_w |w(N)|^2.$$

と表す．ここで，$|\cdot|$ はユークリッド距離である．原点出発のランダムウォーク S_N の場合は，容易に

$$c_N = (2d)^N,\ \ E^N[\ |S_N|^2\ ] = N$$

がわかる．

問題：c_N，$E^N[\ |w(N)|^2\ ]$ は $N \to \infty$ での漸近的にどう振舞うか？　これに関しては次の形の予想がなされている．

$$c_N \sim \mu^N N^{\gamma - 1}, \quad (N \to \infty). \tag{1}$$

$$E^N[\ |w(N)|^2\ ] \sim N^{2\nu}, \quad (N \to \infty). \tag{2}$$

（ここで，$\sim$ の解釈は強弱様々ある．）(1) を仮定したとき，μ を **connective constant** という．(2) の ν を**平均２乗距離の指数**という．RW に対しては，$\gamma = 1, \nu = 1/2$ である．SAW の場合

は，$d^N \leqq c_N \leqq 2d(2d-1)^{N-1}$（下からは各座標の正方向のみに進めるウォークで評価，上からは1歩前の点に戻ることのみ禁止して評価）までは容易に得られ，また$\mu = \lim_{N\to\infty} c_N^{1/N}$の存在も初等的に証明できる．$d \geqq 5$では，次元$d$によらず，$\gamma = 1, \nu = 1/2$が証明されているが，$d = 2, 3, 4$では上と下からの評価しか得られていない．$d = 4$では次のようなlog補正のついた漸近的振舞いが予想されている．$c_N \sim A\mu^N[\log N]^{1/4}$, $\quad E[|\omega(N)|^2] \sim DN[\log N]^{1/4}$.

$\mathbb{Z}^d$ 上の自己回避ウォークに関しては [7] および [5] に詳しく書かれている．

3.2 フラクタル格子上の自己回避ウォーク.

2次元 pre-Sierpinski gasket 格子上の，原点（左下の端点）出発の N 歩の path に等確率を与えた SAW を考える．このとき，以下のような結果が得られている．([19], [21]）物理の論文に予想はあったが（[17], [18]），それを厳密に証明したものである．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log c_N}{N} = \beta_c, \quad \mu = \exp \beta_c = 2.288\ldots.$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log E^N[|w(N))|^s]}{\log N} = s\nu, \quad s > 0.$$

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda_2} = 0.7986\ldots > \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{5}}{2} = 2.381\ldots$$

$s = 2$ で平均 2 乗距離だが，ν は任意の $s > 0$ に対して共通の値をとる．

（正三角形の代わりに正四面体を用いて作られる **3次元 Sierpinski gasket 格子**に対しても同様の結果が得られている．β_c, ν などの値は異なる．([22])）

フラクタル上の数理モデルの臨界現象を調べる上で recursion が出発点となるが，理論物理でくりこみ群とよばれてきた方法である（[5]）．比較的わかりやすい Sierpinski gasket 格子上の SAW について少し詳しく説明する．SAW の recursion relation を得て，解析を行うには，いったん両端固定の SAP に $\exp(-\beta\times$[長さ]$)$ に比例する確率を割り当てた SAW の別のモデルを考える．Section 2.2 と同様に，大きさ 2^n の有限 Sierpinski gasket 格子を F_n，その頂点集合を G_n，外側の三角形の頂点を O（原点）, a_n, b_n とする．O を出発して $\triangle Oa_nb_n$ 内を通って初めて a_n に到達するまでの有限歩の SAP 全体の集合を W_n とする．初めて a_n に到達したときの歩数 $L(w)$ を **path の長さ**とよぶ．すなわち，$w \in W_n$ とは

$$w(i) \in G_n,\ w(0) = O,\ \ |w(i+1) - w(i)| = 1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \subset F_n,$$

$$w(i) \neq w(j),\ (i \neq j),\ i, j \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$$w(L(w)) = a_n, \quad 0 \leqq \forall i < L(w) \text{ に対して } w(i) \neq a_n.$$

W_n に属する path の**母関数** (generationg function) を次のように定義する．

$$\tilde{\Phi}_n(\beta) = \sum_{w\in W_n} e^{-\beta L(w)}.$$

recursion を得るために，集合 W_n を，b_n を通る path の集合を $W_{1,n}$ と，通らない path の集合 $W_{2,n}$ に分けて考える．$W_{1,n}$ と $W_{2,n}$ の母関数を以下のように定義する． $x, y \geqq 0$, $s_1(w)$, $s_2(w)$ はそれぞれ w が 1 辺と 2 辺を通った辺の長さ 1 の小三角形の数とする．このとき，$s_1(w) + 2s_2(w) = L(w)$ である．

$$\Phi_n(x, y) = \sum_{w\in W_{1,n}} x^{s_1(w)}y^{s_2(w)}, \quad \Theta_n(x, y) = \sum_{w\in W_{2,n}} x^{s_1(w)}y^{s_2(w)}.$$

$$\Phi_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2y + x^3, \quad \Theta_1(x, y) = x^2y + 2xy^2.$$

F_n 上の path は，$2^{n-1}F_1$ 上の path の１歩１歩に F_{n-1} 上の path をあてはめて得られるから，次のような recursion が得られる．

$$(\Phi_n(x,y),\Theta_n(x.y)) = (\Phi_1(\Phi_{n-1}(x,y),\Theta_{n-1}(x.y)),\Theta_1(\Phi_{n-1}(x,y),\Theta_{n-1}(x.y))).$$

こうして２次元の力学系に帰着する．この力学系は $(0,0)$ 以外に唯一の固定点

$$(\Phi_1(x_c,y_c),\Theta_1(x_c.y_c)) = (x_c,y_c),\quad x_c = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ y_c = 0$$

をもつことが証明できる．$x = \exp(-\beta), y = \exp(-2\beta)$ とすると $x^{s_1(w)}y^{s_2(w)} = \exp(-\beta L(w))$ となる．この形で recursion の式に入れると，$n \to \infty$ のときの振舞いがわかる．それはある β_c を境にがらりと変わる．相転移が起こるのである．

$\beta > \beta_c$ のとき $(\Phi_n(x,y),\Theta_n(x.y)) \to (0,0)$,
$\beta = \beta_c$ のとき $(\Phi_n(x,y),\Theta_n(x.y)) \to (x_c,0)$
$\beta < \beta_c$ のとき $(\Phi_n(x,y),\Theta_n(x.y)) \to (\infty,\infty)$,
（いずれの場合も，$\Theta_n/\Phi_n \to 0$.）

この結果から N 歩の path に等確率を与えた場合の connectivity constant が得られるが，このことを直感的に見てみよう．$b_k = \sharp\{w \in W_n : L(w) = k\}$ とおくと，

$$\tilde{\Phi}_n(\beta_c) = \Phi_n(e^{-\beta_c}, e^{-2\beta_c}) + \Theta_n(e^{-\beta_c}, e^{-2\beta_c}) = \sum_{w\in W_n} e^{-\beta_c L(w)} = \sum_k b_k e^{-\beta_c k}.$$

最後の和は収束するが，k が大きいとき $e^{-\beta_c k}$ は小かつ b_k は大．k が小さいとき $e^{-\beta_c k}$ は大かつ b_k は小であり，このバランスでもっとも効く k^* が存在して，$\sum_k b_k e^{-\beta_c k} \sim C b_{k^*} e^{-\beta_c k^*}$, $b_{k^*} \sim (e^{\beta_c})^{k^*}$ となることが推測できるだろう．$\lambda_2 = 2x_c + 3x_c^2$ とおくと，O から a_n までの平均歩数は漸近的に λ_2^n のように振舞う．このことから平均２乗距離の指数が $\log 2/\log\lambda_2$ であることが理解できる．また相関距離については，$\beta > \beta_c$ で

$$\xi(\beta) = \lim_{n\to\infty}\{-\frac{1}{2^n}\log\tilde{\Phi}_n(\beta)\}^{-1}$$

が存在して $\xi(\beta) \sim (\beta-\beta_c)^{-\nu}$,　$(\beta \downarrow \beta_c)$ のように振舞うことがわかっている．

4　さいごに．

ここで触れたのはフラクタル上の数理モデルのうちのほんの一部である．触れられなかったフラクタル格子上のトピックの例としては，サイト・パーコレーション（[11], [14], [13] ），有向パーコレーション (oriented percolation)（各座標の正の方向のみにつながることができる）（[15]），イジング・モデル（[31]），自己回避ウォークの連続極限（格子間隔→０の極限）（[20], [22], [25]），自己反発ウォーク（同じ点に戻ることは禁止はされないが，抑制される）（[26], [27], [28]），uniform spanning tree （[32]）などがある．

フラクタル上のパーコレーションに関しては，infinitely ramified フラクタルで相転移が起こる十分条件がいくつか得られているが，ブロック F_n を切り出すときの辺の数の漸近的な振舞いなどで統一的に記述できないだろうか．相転移が起こることが証明されたら，次は相関距離，平均クラスターサイズなどの臨界点での振舞いを知りたい．

SAW に関しては，d 次元 gasket でも原理的に recursion は得られる．しかし次元 d とともに式の数は増え、式の形も急激に複雑になる．３次元 gasket 上の SAW でさえ，４次元のかなり複雑な力学系になるが，この場合４変数のうち２変数が効かなくなる（０に近づく）ことが証明できるため，厳密な結果が得られた．d 次元 gasket 上の SAW は「制限された」モデルに関する結果がある（[23], [24]）．３次元の場合と同様いくつかの変数は効かなくなると予想されるため,「制限された」モデルが正しい指数を与えていると期待できる．Sierpinski carpet 上の SAW に関する数学的結果はまだない．

さらに，パーコレーション，SAW のモデルも非等方的，空間のランダム化など様々な一般化が考えられる．

ここでは，先にモデルがあり，それを recursion を用いて解析したが，逆に recursion（粗いスケールと細かいスケールの関係式）に基づく様々なフラクタル上の確率過程（自己回避，自己反発過程に限らず広い範囲のものが豊かにありそう）の構成と解析も期待できる．

2004 年朝日新聞の 1 面トップにフォトニック・フラクタルの電磁波閉じ込め現象発見 ([29]) の記事が載った．その後，この実験に関する論文が多く出されている．理論的研究は [30] に見られる．ここにも課題がありそうだ．フラクタル上の様々な物理現象に関しては，Mandelbrot が最初の本を出してから，物理学者の優れた直観による理論的結果，数値計算結果が数多く出されてきた．数学者による証明が待たれているかもしれない．

以下の文献は講演者が見つけたもののみですべてを尽くすものではありません．他に関連論文があればお知らせいただければ幸いです．

References

[1] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature,* Freeman 1983 (Revised edition of *Fractals* 1977)

[2] K. Falconer, *Fractal geometry*, 2nd ed. Wiley 2003

[3] 本田勝也　『フラクタル』　朝倉書店　2002

[4] 樋口保成　『パーコレーション　ちょっと変わった確率論入門』　遊星社　1992

[5] 服部哲弥　『ランダムウォークとくりこみ群』　共立出版　2004

[6] G. Grimmett, *Percolation*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1999

[7] N. Madras, G. Slade, *The self-avoiding walk* Birkhäuser, 1993

[8] 木上淳　「フラクタルと数学」　岩波講座現代数学の基礎『現代数学の広がり 2』　岩波書店　2005

[9] 熊谷隆　フラクタル上解析学の展開，数学　**56** (2004) 337–350

[10] Y. Gefen, A. Aharony, Y. Shapir, B. Mandelbrot, *Phase transition on fractals: II. Sierpinski gaskets,* J. Phys. A:Math. Gen. **17** (1984) 435–444.

[11] M. Shinoda, *Percolation on the pre-Sierpinski gasket,* Osaka J. Math. **33** (1996) 533–554.

[12] T. Kumagai, (1997) *Percolation on pre-Sierpinski carpets,* In New Trends in Stochastic Analysis (Proc. Taniguchi Internat. Workshop, 1994), eds K.D. Elworthy et al., World Scientific, River Edge, NJ, pp. 288–304.

[13] J. Murai, *Percolation in high-dimensional Menger sponges,* Kobe J. Math. **14** (1997) 49–61.

[14] M. Shinoda, *Exitence of phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices,* J. App. Probab. **39** (2002) 1–10.

[15] M. Shinoda, *Non-existence of phase transition of oriented percolation on Sierpinski carpet lattices,* Prob. Theory Relat. Fields **125** (2003) 447–456.

[16] Y. Higuchi, X.-Y. Wu, *Uniqueness of the critical probability for percolation in the two dimensional Sierpinski carpet lattice,* Kobe J. Math. **25** (2008) 1–24.

[17] R. Rammal, G. Toulouse, J. Vannimenus, *Self-avoiding walks on fractal spaces: exact results and Flory approximation,* J. Physique **45** (1984) 389–394

[18] D. Dhar, *Self-avoiding random walks: some exactly soluble cases,* J. Math. Phys. **19** (1978) 5–11

[19] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpinski gasket,* Prob. Theory Relat. Fields **84** (1990) 1–26

[20] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpinski gasket,* Prob. Theory Relat. Fields **88** (1991) 405–428

[21] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on the Sierpinski gasket,* Prob. Theo. Rel. Fields **93** (1992) 273–384

[22] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three-dimensional Sierpinski gasket,* Publication of RIMS **29** (1993) 455–509

[23] T. Hattori, T. Tsuda *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpinski gaskets,* Jour. Stat. Phys, **109** (2002) 39–66

[24] T. Hattori *The fixed point of a generalization of the renormalization group maps for self-avoiding paths on gaskets,* Jour. Stat. Phys. **127** (2007) 609–627

[25] K. Hattori *Fractal geometry of self-avoiding process,* J. Math. Sci. Univ. of Tokyo, **3** (1996) 379–397

[26] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling walk on the Sierpinski gasket,* Prob. Theor. Relat. Fields, **124** (2002) 1-25

[27] K. Hattori, T. Hattori, *Displacement exponents of self-repelling walks and self-attracting walks on the pre-Sierpinski gasket,* J. Math. Sci. Univ. of Tokyo, **12** (2005) 417–443

[28] M. Denker, K. Hattori, *Recurrence of self-repelling and self-attracting walks on the pre-Sierpinski gasket and $\mathbb{Z}$,* Stochastics and Dynamics, **8** (2008) 155–172

[29] M. W. Takeda, S. Kirihara, Y. Miyamoto, K. Sakoda, K. Honda, *Localization of electromagnetic waves in three-dimensional fractal cavities,* Phys. Rev. Lett. **92** (2004)

[30] K. Honda, Y. Otobe, *Rigorous solution for the electromagnetic waves propagating through pre-Cantor sets,* J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) L315–L322

[31] Y. Higuchi, N. Yoshida, *Ising models on the lattice Sierpinski gasket,* J. Statis. Phys. **(**84) (1996) 295–307

[32] S. C. Chang, L. C. Chen, W. S. Yang, *Spanning trees on the Sierpinski gasket,* J. Statis. Phys, **126** (2007) 649–667