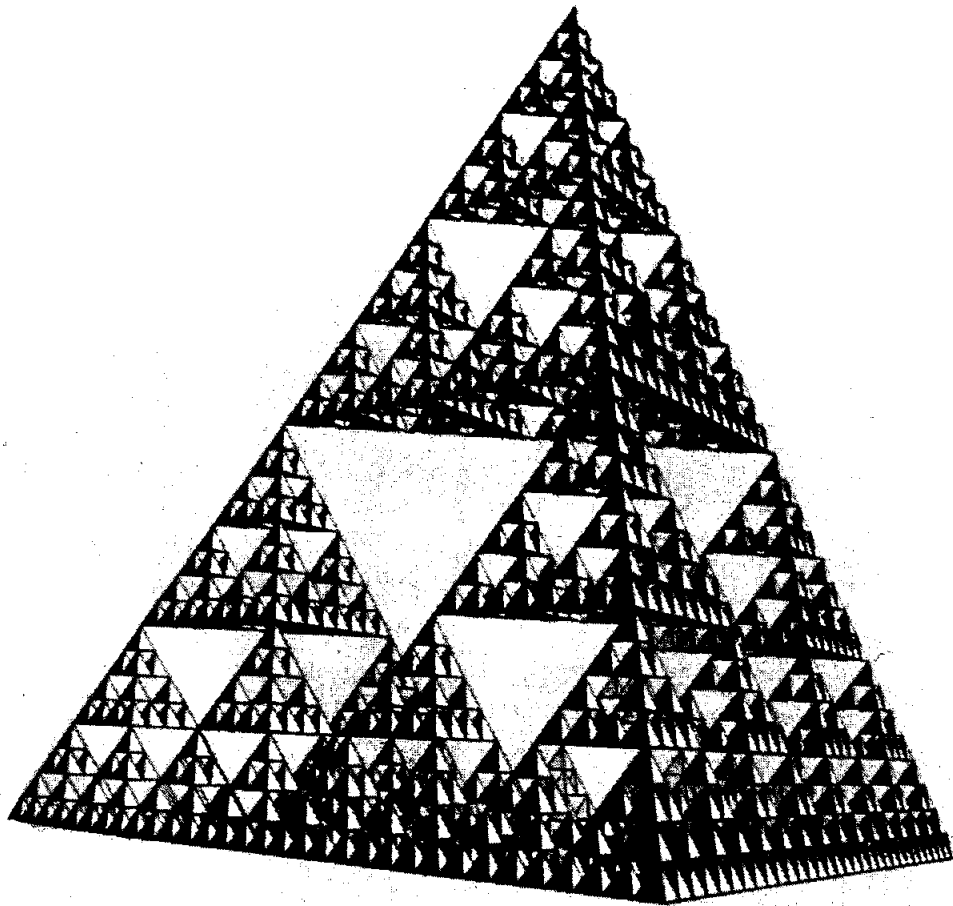


3次元シェルピンスキー・ガスケット



$$d_H = 2$$

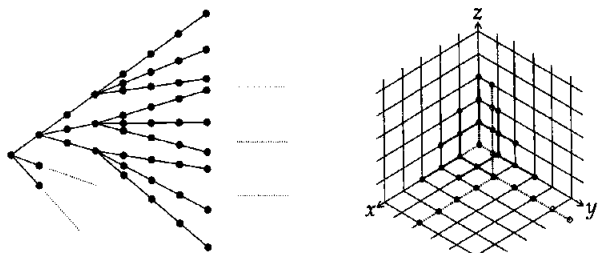
"Fractal Geometry" Mandelbrot 著

回路の0から $\infty$ への有効抵抗は

$$R_{\text{eff}}^{V_2}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{8k+4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8k+4} = \infty$$

となり、ショート則より  $R_{\text{eff}}^{V_2}(0) \leq R_{\text{eff}}^{Z^2}(0)$  であるから  $Z^2$  の有効抵抗も無限大である。したがって (3.2.7) より、この回路に対応する  $Z^2$  のシンプルランダムウォークは再帰的である。 $Z^1$  は  $Z^2$  のボンドの一部をカットして作られるから、カット則より有効抵抗は  $Z^2$  のそれより大きく、やはり無限大である。したがって  $Z^1$  のシンプルランダムウォークも再帰的である。

次に  $Z^3$  を考えよう。まず、天下り的ではあるが図3.11のような電気回路 ( $T_3, B_3$ ) を考える。これは、原点から三つのボンドが出てそれぞれが三つのボンドに分かれ2ステップ延びた後、再びそれぞれの頂点から三つのボンドに分かれ  $2^2$  ステップ延びる、ということを繰り返した無限グラフの各ボンドに抵抗値1を与えた回路である。この無限グラフは、同じ形の枝が原点からボンドで結ばれることなく伸びているから、この回路の0から $\infty$ への有効抵抗を計算する際、エネルギーが最小になる電位は、原点からの距離が等しい頂点では同じ値をとる。したがって、それらの頂点をショートさせても、エネルギーに変化はない。よって有効抵抗も変わらない。 $\sum_{i=0}^n 2^i \leq j < \sum_{i=0}^{n+1} 2^i$  のとき、原点からの距離が  $j$  の頂点から  $j+1$  の頂点へのボンドは  $3^{n+1}$  本あるから、これらの頂点間の抵抗値は  $1/3^{n+1}$  である。抵抗値がこの値である抵抗が  $2^n$  本直列に並



$T_3$  の図

$T_3$  を  $Z^3$  にはめ込んだ図

図 3.11

び、それが  $n=0$  から  $\infty$  まで続いているから、この回路の0から $\infty$ への有効抵抗は

$$R_{\text{eff}}^{T_3}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 2^k / 3^{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \times \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} = 1$$

となり、対応するマルコフ連鎖は非再帰的である。さて、この回路を  $Z^3$  に図3.11のようにはめ込もう。 $n$  回目の枝分かれが起こる点の位置は  $x+y+z = 2^{n-1} - 1$  上にあり、枝分かれした各点からボンドは軸の正方向にのびるから、はめ込んだボンド同士は重なり合わない。よって、はめ込んだ電気回路を ( $T'_3, B'_3$ ) とすると、これは ( $T_3, B_3$ ) からいくつかの頂点をショートさせたものとなり、有効抵抗は  $T_3$  のそれより小さい。一方、この回路 ( $T'_3, B'_3$ ) は  $Z^3$  からボンドをカットしてできるものであるから、有効抵抗は  $Z^3$  のそれより大きい。このことから  $R_{\text{eff}}^{Z^3}(0) \leq R_{\text{eff}}^{T'_3}(0) \leq 1$  となり、有効抵抗が有限になるから (3.2.7) よりこの回路に対応する  $Z^3$  のシンプルランダムウォークは非再帰的である。 $d \geq 4$  の  $Z^d$  については、 $Z^d$  のボンドの一部をカットして  $Z^3$  のグラフを作ることができるから、カット則より有効抵抗は  $Z^3$  の方が大きい。つまり  $Z^d$  の有効抵抗値も有限である。したがって  $Z^d$  ( $d \geq 4$ ) のシンプルランダムウォークも非再帰的である。

### 3.2.3 いろいろなグラフ上のマルコフ連鎖の再帰性

より一般のグラフ、例えば図3.13のようなグラフ上の電気回路に対応するマルコフ連鎖が再帰的か否かはどのように判定するとよいであろうか？ 実は、これらのグラフ上の電気回路を簡単なグラフ上の電気回路と比較することにより判定することができるというのが、この小節の主な話題である。二つのグラフの上のマルコフ連鎖がともに再帰的あるいはともに非再帰的であるとき、二つのマルコフ連鎖は同じ型 (same type) であるという。まずは基本的な事実を紹介する。

命題 3.2.7 ( $V, B$ ) 上に二つの電気回路 ( $V, C$ ), ( $V, C'$ ) が与えられているとする。正の数  $c_1, c_2$  が存在して、任意の  $\{x, y\} \in B$  について

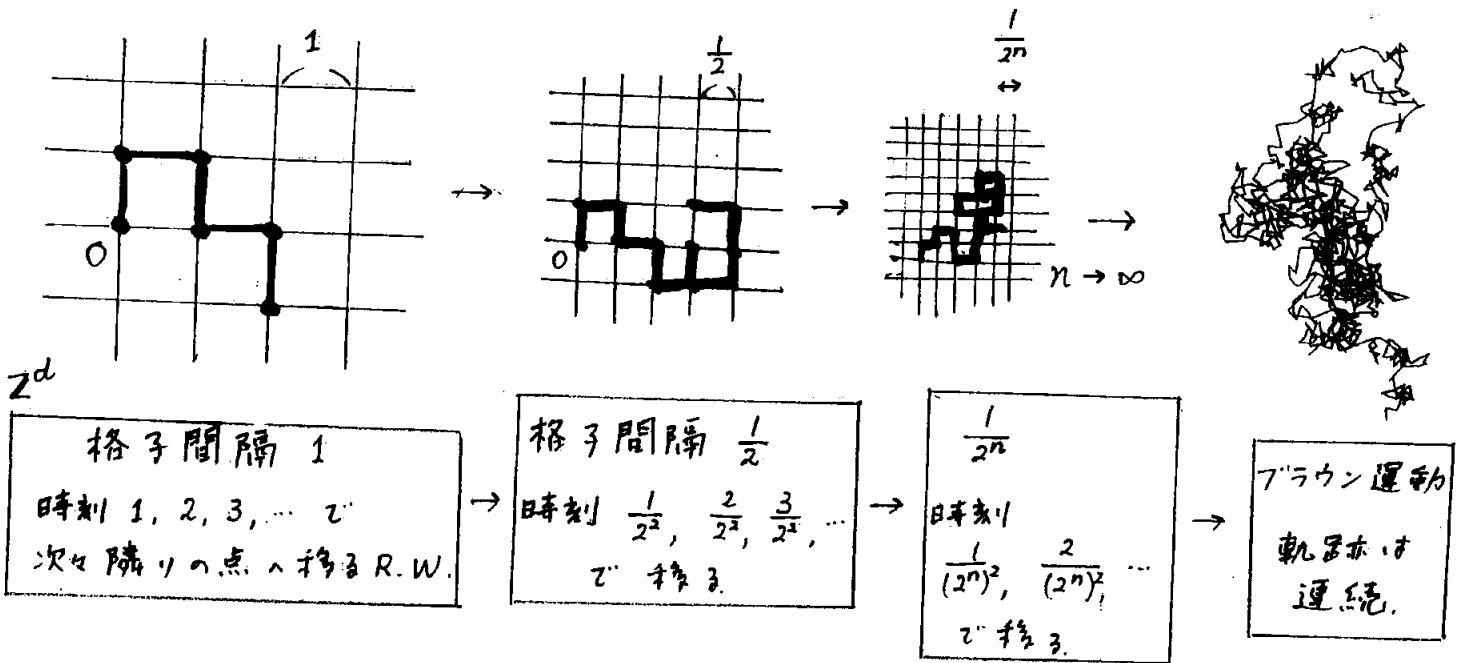
$$c_1 C_{xy} \leq C'_{xy} \leq c_2 C_{xy} \tag{3.2.8}$$

「確率論」 熊谷隆著より

# $\mathbb{R}^d$ 上の RW の連続極限 (scaling limit, continuum limit)

いままで  $\mathbb{Z}^d$  (格子間隔が 1) 上で考えてきたが、 $(a\mathbb{Z})^d$  (格子間隔が  $a$ ) 上の RW を考え、 $a \rightarrow 0$  でどのような確率過程になるかを考える。離散的な空間が連続な空間に近づくので**連続極限**という。

初め、 $\mathbb{Z}^d$  上の RW が、時刻  $1, 2, 3, \dots$  で次々隣の点に移っていくとしよう。格子間隔を小さくするとき、相変わらず時刻  $1, 2, 3, \dots$  で隣の点に移るとしたのでは、walk はだんだん遅くなり、 $a \rightarrow 0$  の極限で止まってしまう。そこで**適当な加速** (隣に移る時間間隔を短くする) が必要。 $\mathbb{Z}^d$  上の RW は適当に加速しながら、連続極限を取ると、 $\mathbb{R}^d$  上の**ブラウン運動** (Brownian motion) に収束する。



格子間隔  $\frac{1}{2^n}$  のとき、時間間隔を  $\frac{1}{(2^n)^2}$  とするのは、すべての  $d$  に共通。(これ以外の時間間隔 (例えば、 $\frac{1}{2^n}$  や  $\frac{1}{(2^n)^3}$ ) を取ると、極限で、原点に留まったまま動かなかつたり、一瞬のうちに遠くまで飛んで軌跡が不連続になったりで面白くない。

★ブラウン運動の振舞いは計算できる。

原点から出発した  $\mathbb{R}^d$  上の**ブラウン運動**が時刻  $t$  に  $A \subset \mathbb{R}^d$  にいる確率は

$$P(t, A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right) dx_1 \cdots dx_d,$$

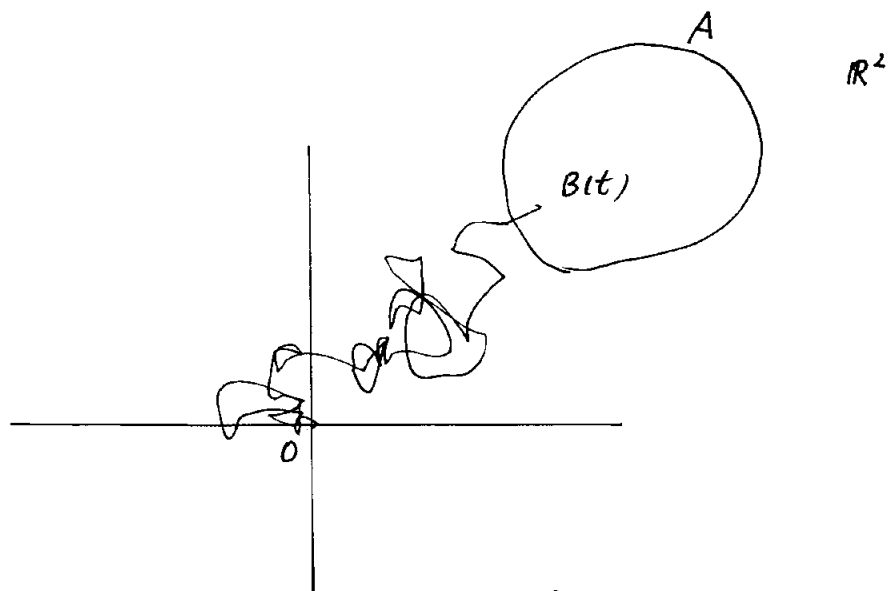
$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

★ RW がブラウン運動に収束する、というときの「収束」は [法則収束]。

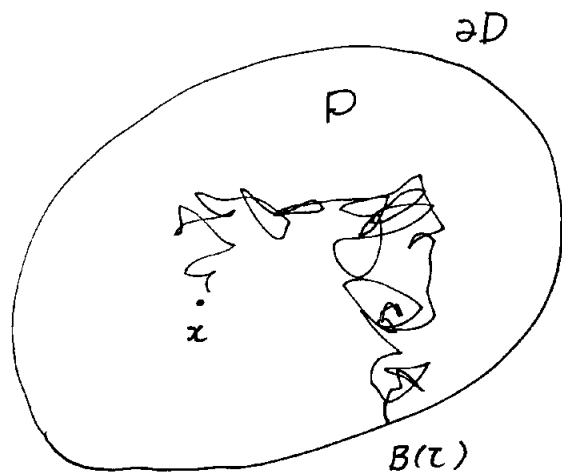
★ 平均 2 乗距離の指数  $\nu$  と、連続極限をとるときの加速のしかたには関係がある。

$d \geq 2$  の BM の軌跡

$$dH = 2$$



$$P[B(t) \in A] = \int_A p(t, x) dx_1 dx_2$$



調和関数  $v(x) = E^x[q(B(\tau))]$