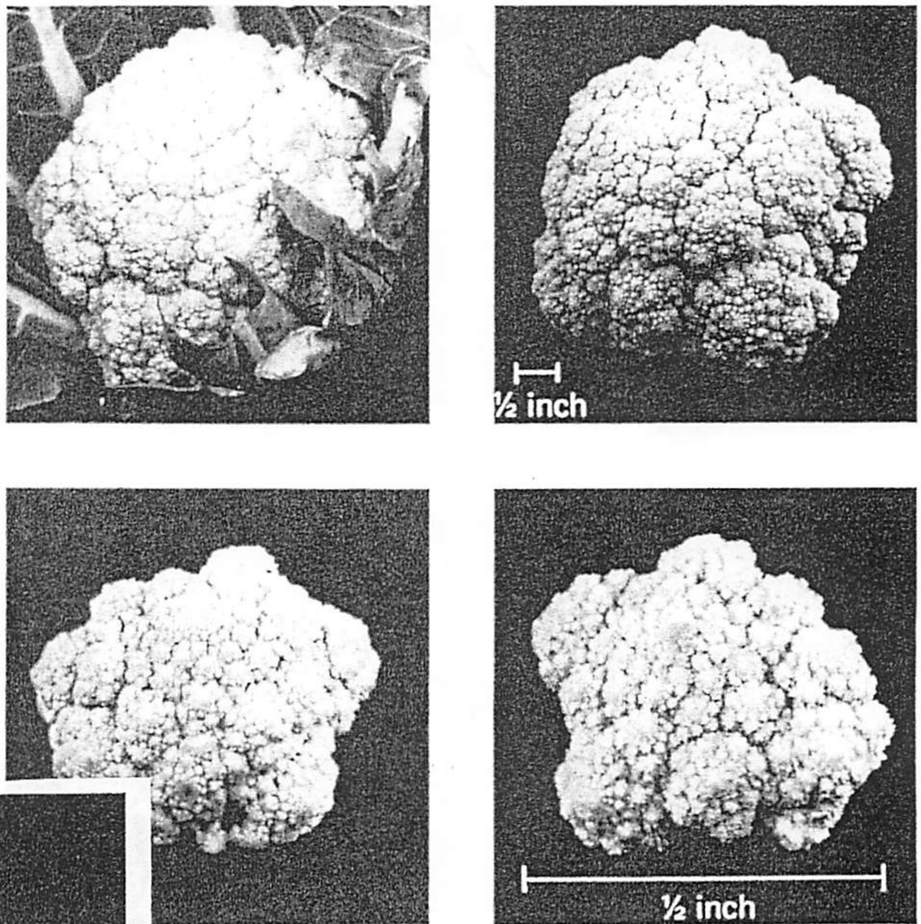
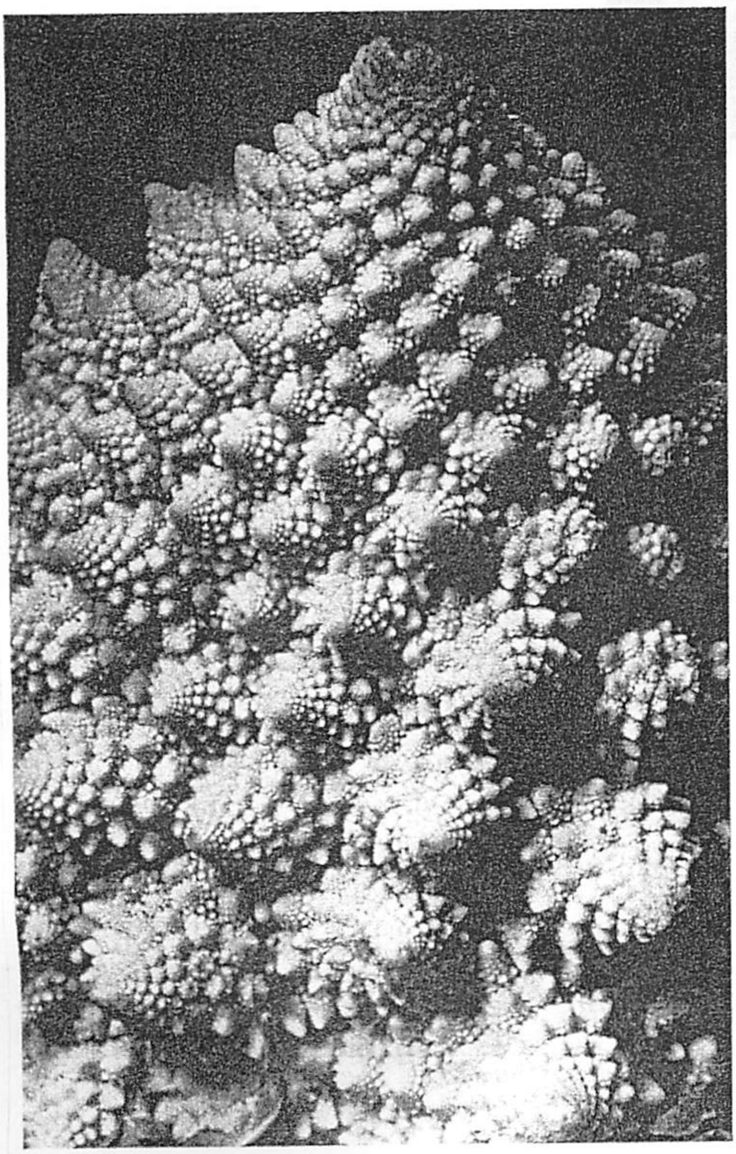
フラクタル － １．５８次元の図形とは？



(B)

(A)



(C)

フラクタル － １．５８次元の図形とは？

１．フラクタルとは？

このテキストでは「フラクタル幾何学」という１９７０年代に生まれた新しい数学の分野の紹介をします。

第１節の目的はいろいろな図を通してフラクタルとなじみになっていただくことです。第１節だけ、または第１節と２節だけ読んでもまとまった話になっていて、第５節に挙げた課題例の中には第１節だけ、第１節と２節だけでできるものも含まれています。興味に応じて好きなところまで読んで考えてみてください。

１．バシュキリ

「表紙」の図(A)はバシュキリ（笑う牛）というフランスのチーズのラベルなのですが、スーパーで見かけたことはありませんか。にやけている牛は両耳にイヤリングをしていて、よく見ると、イヤリング自体がバシュキリチーズです。それぞれに笑う牛の絵がついていて、耳にはバシュキリのイヤリングがついていて、さらに小さい笑う牛の絵があって... とずっと続いていきます。そういえば、子供の頃、家に母の三面鏡がありました。３枚の鏡の間に頭をつっこむと、自分がたくさん映っていて小さくなりながら無限に続いているのです。思えば、これが「無限」というものとの最初の出会いだったのかもしれません。

この節では、笑う牛や、三面鏡に映った自分のような、不思議な図形をご紹介します。そういう図形には「フラクタル」という名前がついています。まず「フラクタルとは何か」をお話しして、次に「フラクタルはどこにでもある」、すなわち、数学でしか扱わない特別な図形ではなく、実は身の回りにごろごろあって、さわったり、食べたりできるものだというお話をします。最後に、「なぜ、フラクタルを研究するか」ということで、フラクタルのもたらした新しい世界の見方をご紹介しようと思います。

２．コッホ曲線

図１はコッホ曲線とよばれるフラクタルの作り方をあらわしています。コッホ曲線はとげだらけの怪物なのですが、最初は長さ１の線分を用意します。次の段階で図の E_1 のように一つ角を生やします。そうすると４本の長さ１／３の線分でできた図形になりますが、さらにそれぞれの線分に角を生やします。そうすると１６本の長さ１／９の線分からできた図形になり、そのそれぞれの線分に角を生やし... とずっと続けていくわけです。**無限に続けていくと**、無限に多くのとげをもった、それでいて端から端までつながった**コッホ曲線**ができあがります。これは、数学の時間に習う円や３角形とは、見かけがまったくちがいますが、それなりに、かわいいと思いませんか？

３．自己相似性

無限のぎざぎざのほかに、この図形のもうひとつの特徴は自分の縮小コピーを集めてできている、ということです。出来上がったコッホ曲線から、図２のように、たとえば左側の部分を取り出して３倍すると、ぴったりもとのコッホ曲線になります。もっと小さい部分（たとえば図２では右端の部分）を取り出して、今度は９倍すると、やはりぴったり元

の図形になります。この性質は、自分の一部と相似という意味で、**自己相似性**とよばれます。どんな図形も自己相似性をもっているとは限りません。

4．自己相似性をもたない図形

たとえば、おなじみの円は自己相似性をもちません。図３のように一部を拡大してみると最初より平らになってしまいます。

5．シェルピンスキーの３角形

図４は**シェルピンスキーの３角形**とよばれる別のフラクタルの作り方を表したもので、できあがった図形はやはり自己相似性をもっています。**フラクタル**とは自己相似性をもつ図形です。いいかえると、自分の縮小コピーを集めてできあがっているものです。

6．木とシダ

ここで、現実の世界に戻りましょう。自己相似性で思い当たることはありませんか？たとえば、木です。木の枝は木全体の縮小コピーのようにみえます。さらに小さい枝も木の縮小コピーのような形をしています。シダの葉についても同じようなことがいえます。木やシダは、コッホ曲線やシェルピンスキーの３角形のように厳密ではありませんが、（近似的な）自己相似性をもっています。（図５，６）

7．カリフラワー

カリフラワーも自己相似性をもっています。表紙の図 (B) の４つの写真は同じように見えますが、左上の、葉のついているのがカリフラワー全体で、右上はそのうち一房を切り取って拡大したもの、左下はさらにその一部を拡大したものです。図に「１／２インチ」と書いてあるのが約１．３ｃｍにあたります。でもちょっと見ただけではどの絵も同じように見えるでしょう。今度食卓にカリフラワーが出たら「今日の夕食はフラクタルだ！」と言ってみませんか。

8．ロマネスコ

表紙の図 (C) は、コンピュータグラフィクスのように見えますが、現実のものです。カリフラワーとブロッコリの掛け合わせでできた「ロマネスコ」という野菜です。見たことありますか？私は一度だけ近所のスーパーで見かけたことがあります。コンピュータグラフィクスのようにあまりにきれいだったのでショックでした。ここまできれいだとゆでて食べようなんて気になれないんですね。他の人もそう思ったらしく、そのスーパーには二度と現れませんでした。買って試さなかったのは一生の悔いになっています。

9．アマゾン川など

アマゾン川もフラクタルの例です。支流は川全体の縮小コピーのようになっています。（図７）

血管も太い血管から細い血管が枝分かれし、さらに細い血管が枝分かれして、フラクタルになっています。（図８）

人間の脳の表面も、ちょうどカリフラワーの表面のように、細かいしわだらけです。私たちも体の中にフラクタルを持っているのです。

10．フラクタル次元

フラクタルはきれいな図形ですが、きれいだというだけでは、数学にはなりません。フラクタルは世の中の新しい見方を教えてくれます。まず、ふつうの図形から考えましょう。まっすぐな線や円の周は１次元の図形、中の詰まった正方形や、球の表面は２次元の図形というのは抵抗なく受け入れてもらえると思います。一方、コッホ曲線やアマゾン川はまっすぐな線や円周よりは複雑な構造をしています。数学者はその複雑さを数で表す方法を見

出しました。その数が「フラクタル次元」とよばれるものです。フラクタル次元の決め方は第２節以降にまわしますが、ただ、図形が複雑になるほど、フラクタル次元は大きくなります。図にたびたび現れていたd_fという記号はフラクタル次元（fractal dimension）を表しています。「ふつうの」図形に対してはフラクタル次元は「ふつうの」次元と一致します。線や円周のフラクタル次元は1で、中の詰まった正方形や球面は2です。コッホ曲線のフラクタル次元は1.26、シェルピンスキーの３角形は1.58になります。この２つの例は、円周よりは複雑で、中の詰まった正方形と比べると厚みをもたないでスカスカ、ということを表しています。アマゾン川のフラクタル次元は約1.85です。一方ナイル川のフラクタル次元は1.4です。これはどういうことかというと、ナイル川は砂漠を流れている川ですが、アマゾンは熱帯雨林を流れているので、雨の量が圧倒的に多く、ナイル川と比べて支流が発達した結果、フラクタル次元が大きくなるのです。

海岸線も拡大するとさらに細かい湾や半島が見えてきて同じようにぎざぎざにみえますから、フラクタルの仲間です。図１０のノルウェーの海岸線はフラクタル次元約1.52、イギリスの海岸線はフラクタル次元約1.3です。フィヨルドで入り組んでいるノルウェーの海岸線のほうがイギリスの海岸線よりぎざぎざしている様子が、これらの値の中に反映されています。

人間の脳の表面のフラクタル次元は約2.7だといわれています。つるんとした球面よりはでこぼこして複雑な構造をもっているからです。この、2ではなく2.7というところに、人間の知能の秘密があるといえるでしょう。

１１．神は円と波とフラクタルを…

ここまでで、フラクタルは自分自身の縮小コピーを集めてできている図形だということをお話ししました。それは特殊な図形ではなく身の回りに、そして、体の中にも、どこにでもあるふつうのものです。それは新しい世の中の見方を教えてくれて、上でご紹介した「フラクタル次元」はそのごく一部です。カリフラワーを食べるときにフラクタルを思い出していただければとおもいます。この節の図の最後に、「フラクタル」という言葉を作ったマンデルブローという人の本にある挿絵を用意しました。ここに「神は円と波とフラクタルを作られた」と書かれています。それは、円と波とフラクタルは自然の中にあるふつうの図形だということを表しています。地球は丸いし、海には波があるし、そしてフラクタルもいたるところに見つかります。

フラクタルとちょっとなじみになったところで、第２節ではフラクタル次元についてもう少し詳しく見ていきましょう。

２．ハウスドルフ次元

第１節でフラクタル次元をいう言葉を紹介しましたが、これは総称で、詳しく見ると、ハウスドルフ次元、ボックス次元、コンパス次元などに分かれます。これから、これらの定義と、使い分けを見ていきましょう。

まず、線分、円周、正方形、コッホ曲線、シェルピンスキーの３角形のような数学的図形を考えます。

ハウスドルフ次元は「図形の大きさを測る」という視点から定義される次元です。

円周や線分などの1次元の図形の大きさは長さで表されます。半径rの円周の長さは$2\pi r$でrに比例して大きくなります。正方形や球面などの2次元の図形の大きさは面積で表され、一辺aの正方形の面積はa^2、半径rの球面の面積は$4\pi r^2$です。

球や立方体などの3次元の図形の大きさは体積で表されます。

それでは、コッホ曲線の大きさはどう測ったらよいでしょうか。また図1に戻ってみましょう。コッホ曲線を作るには長さ1の線分からはじめます。これを第0段階の図形E_0としましょう。これに角をひとつはやした第1段階の図形E_1は長さ1／3の線分4本からできていますから、全体の長さは4／3です。第2段階の図形E_2の長さは、$\frac{1}{3^2} \times 4^2 = (\frac{4}{3})^2$、一般に第$k$段階の図形$E_k$の全体の長さは$(\frac{4}{3})^k$となりますから、コッホ曲線の長さは$k \to \infty$の極限をとると$\infty$となります。一方、コッホ曲線は厚さをもちませんから、面積は0です。

コッホ曲線は、長さは無限大、面積は0で、長さも面積もコッホ曲線の大きさを測るには適しません。結論から言うと、長さ（1次元的な大きさ）と面積（2次元的な大きさ）の中間の「1.26次元的な大きさ」を測ると、0でない有限な値になります。

「1.26次元的大きさ」とは何か、を考えるために、普通の図形の例から始めましょう。円を2倍に相似拡大すると、その周の長さは2倍になります。このとき円の面積は4倍になります。球を2倍に相似拡大すると、表面積は4倍になり、体積は8倍になります。

一般に、d次元の図形をa倍に相似拡大すると、そのd次元的な大きさ（1次元的大きさ＝長さ、2次元的大きさ＝面積、3次元的大きさ＝体積）はa^d倍になります。

dを$1, 2, 3$に限らずに、一般に0以上の実数と考えて、図形をa倍に相似拡大したときに、a^d倍になるような量をその図形のd**次元的大きさ**または、もう少し数学的にd**次元測度**とよぶことにしましょう。

ここでは、深入りはしませんが、どのような図形に対しても任意の$d \geq 0$に対して、d次元測度を定義することができます。しかし、d次元測度が正で有限になるようなdの値は、それぞれの図形に対して（あるとしても）ひとつしかありません。その値が**ハウスドルフ次元**です。以下、ハウスドルフ次元をd_Hと書きます。円の周の場合は$d_H = 1$、正方形の場合は$d_H = 2$です。一般に、$d < d_H$ではd次元測度は無限大となり、$d > d_H$ではd次元測度は0となります。

コッホ曲線に対しては、$d = 1.26$のときだけ、d次元測度は正の有限な値になります。この1.26という値は、以下のようにすると出てきます。図2のコッホ曲線のd次元測度をS_dとします。コッホ曲線は4つの$\frac{1}{3}$倍縮小コピーからできていますが、そのそれぞれのd次元測度は（d次元測度の定義から）$(\frac{1}{3})^d S_d$となります。これを4つあわせたものがコッホ曲線ですから、

$$4 \times (\frac{1}{3})^d S_d = S_d$$

が成り立ちます。S_dが0でも∞でもないとすると、両辺をS_dで割って

$$4 \times (\frac{1}{3})^d = 1$$

となります。これをdについて解くと

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26\ldots$$

が得られます。（ちなみに、logの底は何でもかまいません。２であっても１０であっても、底の変換公式から$\frac{\log 4}{\log 3}$の値は変わらないことがわかります。）

これで、コッホ曲線のハウスドルフ次元 $d_H = \dfrac{\log 4}{\log 3}$ が得られました。(実際に、d_H 次元測度が正で有限な値になることはここでは省きますが、証明されています。)

これと同じように考えると、フラクタル図形が $\dfrac{1}{c}$ の縮小コピー n 個からできているとき、その d 次元測度 S_d は

$$n \times (\frac{1}{c})^d S_d = S_d$$

を満たします。S_d が 0 でも ∞ でもないとすると (厳密に自己相似な図形の場合はそのような d が存在することが証明されています)、**ハウスドルフ次元の公式**

$$d_H = \frac{\log n}{\log c}$$

が得られます。

早速使ってみましょう。シェルピンスキーの３角形は $\dfrac{1}{2}$ の縮小コピー３個からできていますから、

$$d_H = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58\ldots$$

となります。

☆この節では d 次元測度という概念を紹介しましたが、これは大学の数学科の３年生が学ぶ「測度論」、「ルベーグ積分」の内容につながるものです。

３．ボックス次元とコンパス次元

第１節で、ノルウェーの海岸線はフラクタル次元約 1.52、イギリスの海岸線はフラクタル次元約 1.3 と述べましたが、この次元はどう定義されたのでしょうか。海岸線は、数学的図形とは異なり、どこまでが海岸線であるかは細かいところまできちんと定義されていません。潮や波の影響がありますから 1m 以下の精度で海岸線を決めることはできません。

こうした自然の中にある形の場合には、ボックス次元、コンパス次元という別の次元の定義が使われます。

ハウスドルフ次元は、数学的に定義された集合ならば必ず定義できますが、コッホ曲線、シェルピンスキーの３角形のように、厳密に自己相似なフラクタル以外は、その値を実際に計算するのはかなり大変です。一方、ボックス次元やコンパス次元はすべての集合に対して定義できるわけではありませんが、自然の中にある形に対して、近似値を求めることは比較的簡単です。

円周、(中の詰まった) 円、球などの普通の図形に対しては、ボックス次元はそれぞれ素直に 1, 2, 3 となり、コッホ曲線、シェルピンスキーの３角形のような厳密に自己相似なフラクタルに対しても、ハウスドルフ次元とボックス次元は等しくなります。(「フラクタル次元」と言った場合どちらを意味するかの区別をしないでよい。)

以下では簡単のため、平面内にある図形の場合に限ってボックス次元、コンパス次元を考えることにします。

図１１のような、平面上のなめらかな曲線に囲まれた図形 A を考えましょう。平面上に一辺 δ の格子を描きます。そして A と交わる正方形の数を N_δ とします。境界がなめらかな場合は、$\delta \to 0$ の極限で $N_\delta \delta^2$ は A の面積 S_A に収束することが示せます（証明は大学１年の授業レベル）。すなわち、

$$\frac{N_\delta \delta^2}{S_A} \to 1 \quad (\delta \to 0)$$

です。

今度は、A の境界と交わる正方形の数を N_δ とすると（上と同じ記号を使いますが混乱する心配はないでしょう）、$\delta \to 0$ の極限で $N_\delta \delta$ は A の境界の長さ L_A に収束することが示せます。すなわち、

$$\frac{N_\delta \delta}{L_A} \to 1 \quad (\delta \to 0)$$

です。

このことを一般化して、平面上の図形 B（コッホ曲線のようにぎざぎざしていてもよいとする）に対して、一辺 δ の格子を考え、B と交わる正方形の数を N_δ とします。もしも、ある0以上の数 s と正の数 c に対して、

$$\frac{N_\delta \delta^s}{c} \to 1 \quad (\delta \to 0) \tag{1}$$

となるならば、B の次元は s であると考えてよいでしょう。この s の値を**ボックス次元**とよび、d_B と表します。d_B は(1)より、

$$d_B = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \tag{2}$$

と表せます。((1)から(2)を導くのは練習問題。)（$\delta < 1$ では、$\log \delta < 0$ であることに注意。）

ボックス次元の利点は、簡単な作業で近似値が求まることです。いくつかの δ の値に対して、N_δ を求めて、横軸に $\log \delta$、縦軸に $\log N_\delta$ をプロットします。（両対数グラフ用紙を使えば log の計算をしないですむので便利！）その結果が直線に近ければ、極限をとらなくても、(1)の両辺を等号で結んで対数をとった式 $\log N_\delta = \log c - d_B \log \delta$ が近似的に成り立っているとみなすことができて、直線の傾きの絶対値がボックス次元の近似値になります。海岸線、川の流れなどの次元はこのようにして求めたものです。

実際には、プロットした点がぴったり一直線に並ばなくても、だいたい直線に沿って並んでいれば十分とします。目分量で、プロットの各点になるべく近い直線を引いて、その傾きを求めればよいのです。

対象となる図形が曲線（ぎざぎざであってもよいが細かい枝分かれがない）の場合は、コンパス次元が一番便利です。コンパスの幅を δ に固定して、端からコンパスをあてて行ってもう一方の端まで（または一周してもとの点に戻るまで）、何回分になるかを数え、その数を M_δ とします。もしも曲線が円周のようになめらかならば、$\delta \to 0$ の極限で $M_\delta \delta$ は曲線の長さに収束することが示せます。一般の場合には、ある0以上の数 s と正の数 c に対して、

$$\frac{M_\delta \delta^s}{c} \to 1 \quad (\delta \to 0)$$

となるならば、この曲線の**コンパス次元**は s であると定義します。上と同様対数をとることにより、コンパス次元 d_C は

$$d_C = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta}{-\log \delta}$$

と求まります。(コッホ曲線のコンパス次元はハウスドルフ次元と等しくなります。)

ボックス次元の場合と同様、いくつかの δ の値に対して、M_δ を求めて、横軸に $\log \delta$、縦軸に $\log M_\delta$ をプロットし、その結果が直線に近ければ、直線の傾きの絶対値がコンパス次元の近似値です。(図１３はファルコナー著『フラクタル幾何学』共立出版より。)

４．まとめ

フラクタルを数学的に扱う例として、ハウスドルフ次元、コンパス次元などのフラクタル次元を紹介しました。これは「フラクタル数学」のほんの「氷山の一角」に過ぎません。フラクタルはカオスや確率論などとの関係でも多くの研究があります。

第１節の例からもある程度想像ができるかと思いますが、フラクタルは、いまや数学だけでなく、物理学、化学、生物学、医学、地理学、工学、経済学など、分野の枠を超えて研究されている分野です。

ここで学んだことが少しは皆さんの好奇心を刺激し、「新しいものの見方に触れた」と思っていただければ幸いです。

５．課題例

いくつか課題の例を挙げてみましたが、自分で見つけた課題は大歓迎です。

１．(第１節までの範囲) 自然の中にあるフラクタルの例をもっと探してみよう。それを入れて、フラクタルとは何かを説明せよ。

２．(第２節までの範囲) 図Ｅ１のいくつかのフラクタルのハウスドルフ次元を求めよ。

３．(第２節までの範囲) ここで学んだフラクタルの作り方を参考に、自分でフラクタルを作り、そのハウスドルフ次元を求めよ。

４．図形 (平面内におさまるもの) をひとつ選んでそのボックス次元を求めよ。(数学的に定義できる図形でも、自然の中の形でもよい。)

５．図Ｅ２のぎざぎざの曲線 (信州大学理学部本田勝也先生提供) のコンパス次元を求めよ。例えば、$\delta = 1cm, 2cm, 4cm, 8cm$ などとして、数えてみよ。(コンパス次元は１と２の間の数になるはず。)

６．第３節の (1) 式から (2) 式を導け。

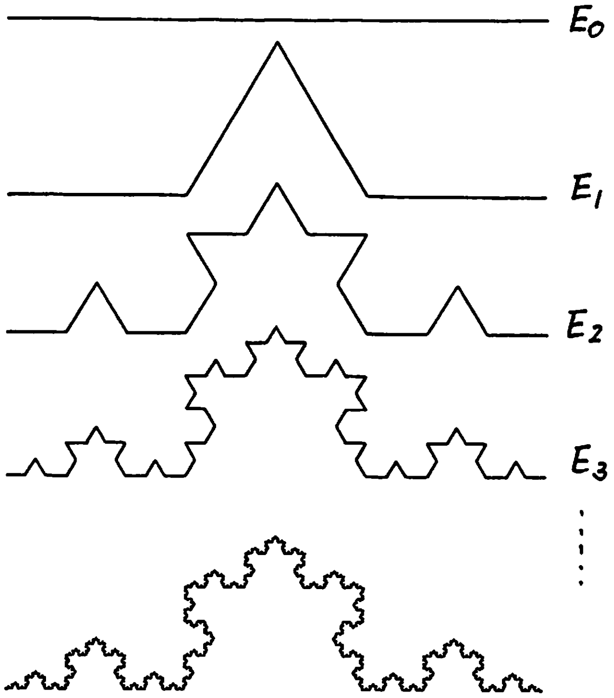


Fig. 1 The Koch Curve [Fa]

df = 1. 26

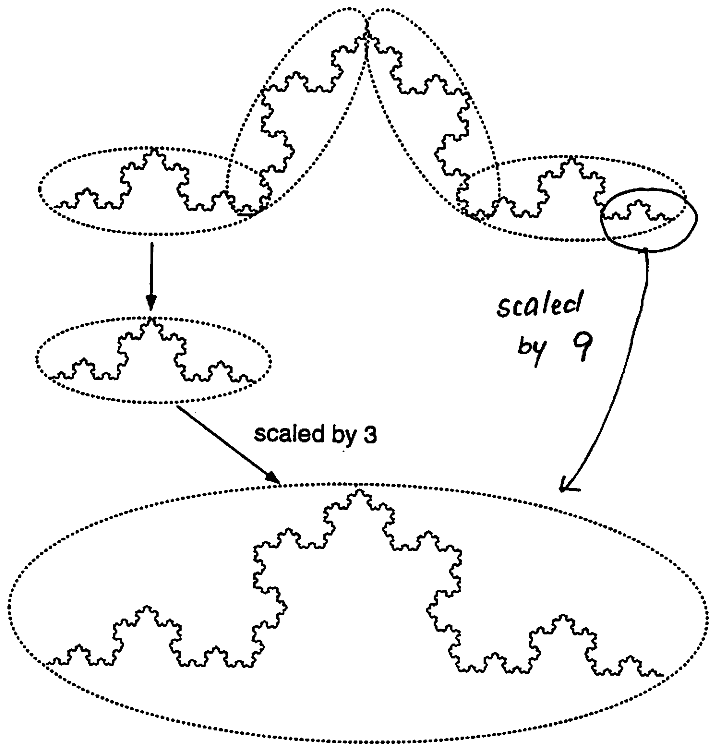


Fig. 2 自己相似性 [P]

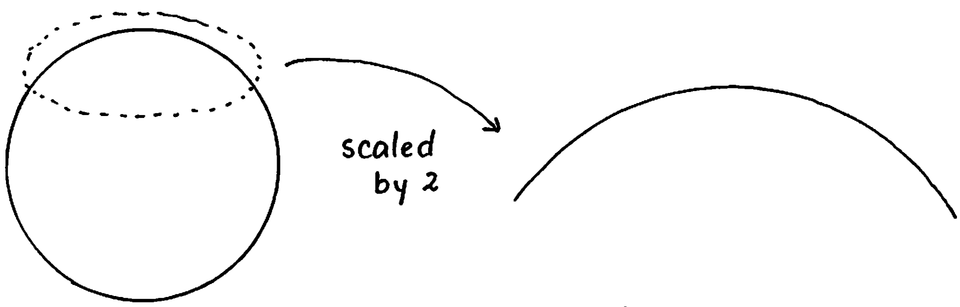
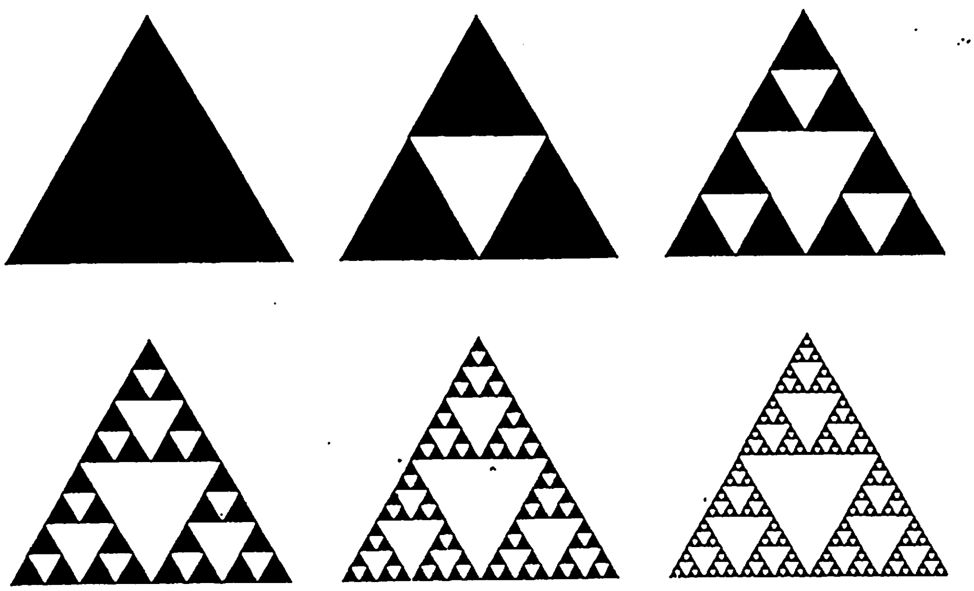


Fig. 3 The enlargement of a circle



[P]

Fig. 4. The Sierpinski Gasket

df = 1. 58

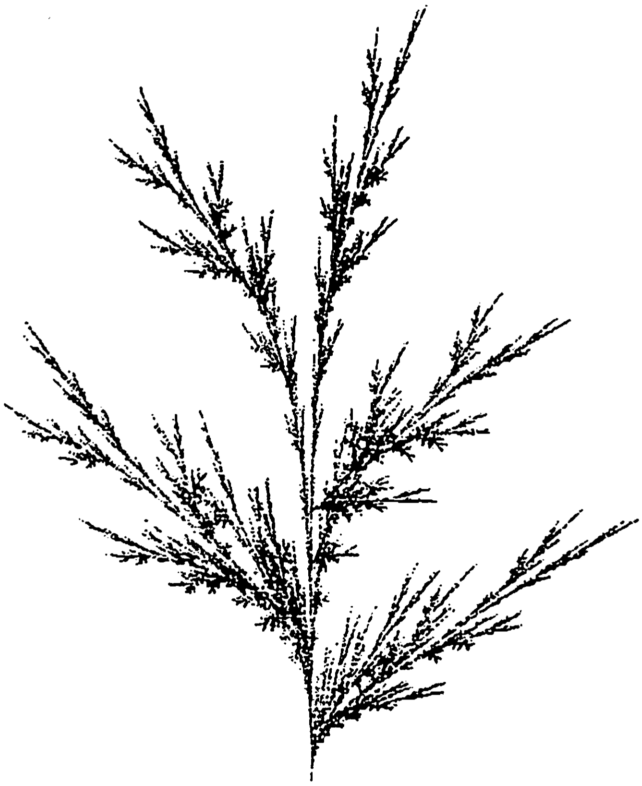


Fig 5. The Tree

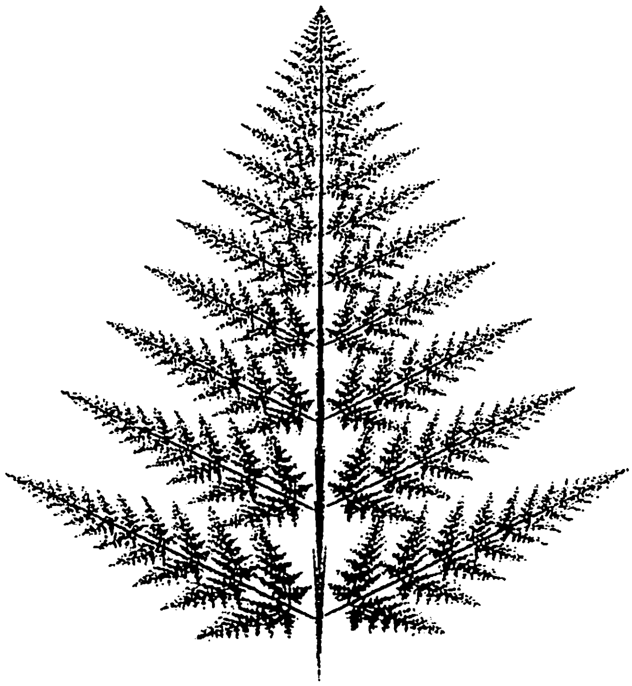


Fig. 6. The Fern [Fa]

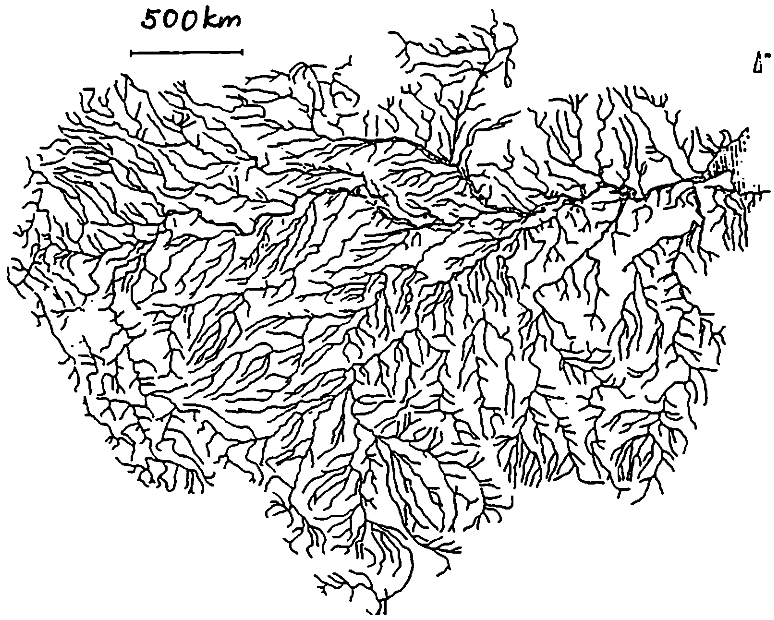


Fig 7. The Amazon [T]

$d_f = 1.85$

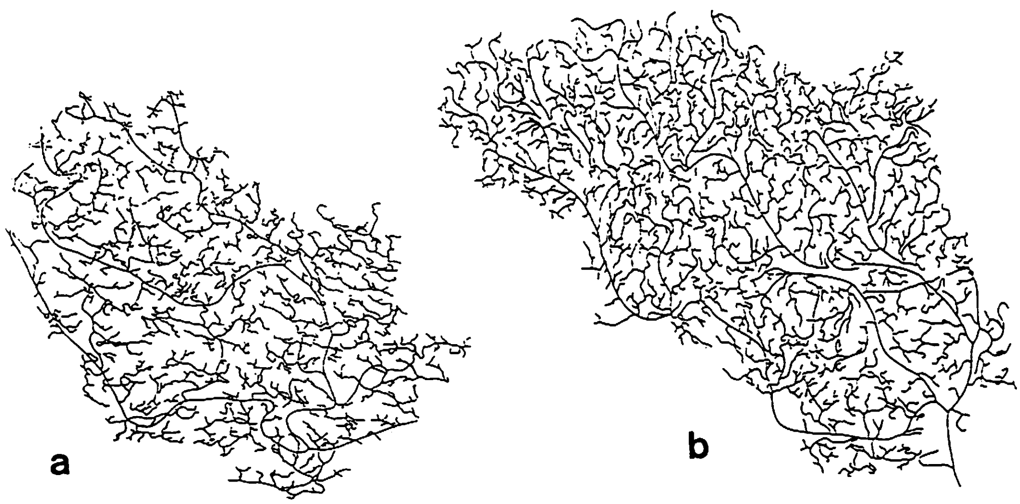


Fig. 8 The Blood Vessels

[Mat]

3.

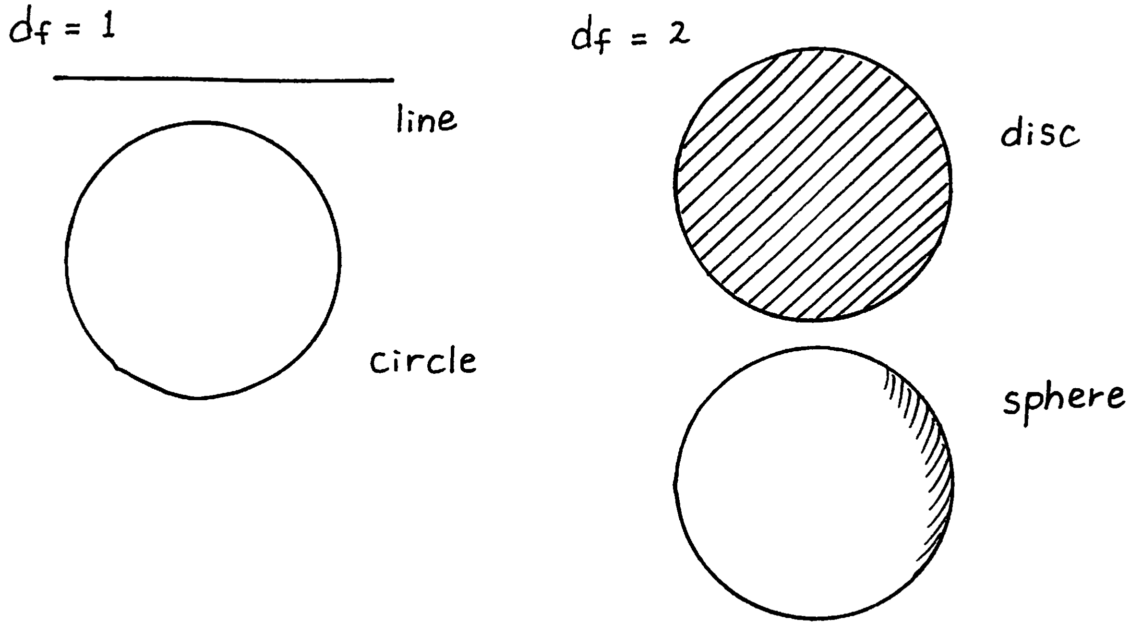


Fig. 9 The Fractal Dimension

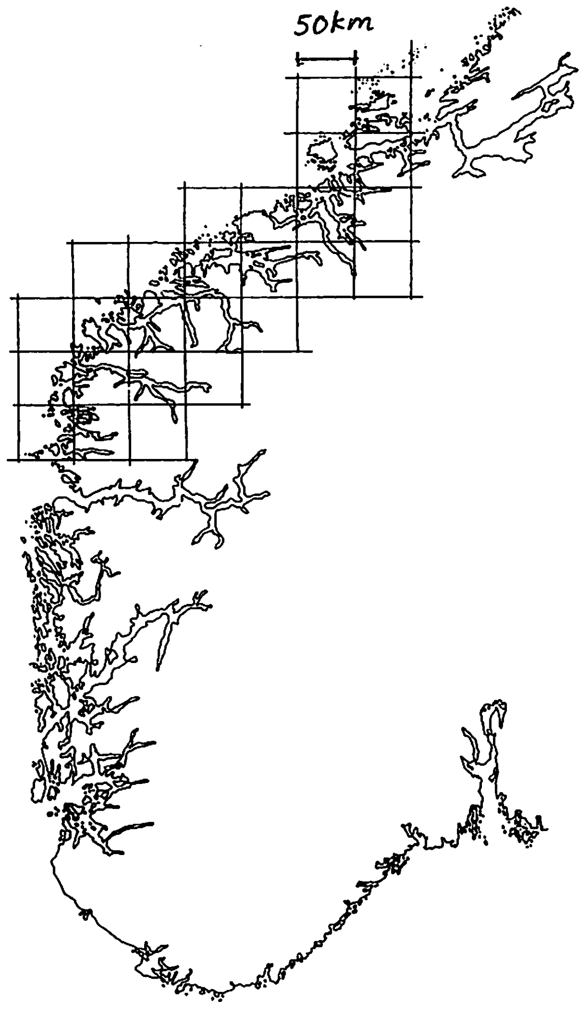
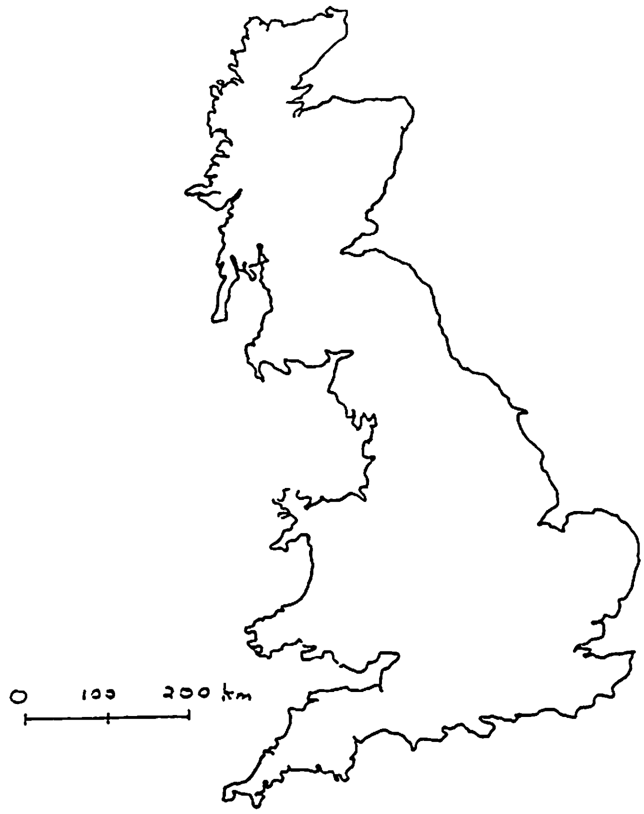


Fig.10.a. The Coast of Norway [Fe]

$d_f \fallingdotseq 1.52$



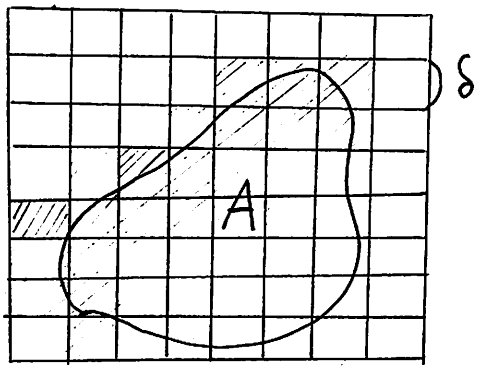
b. The Coast of Britain

$d_f \fallingdotseq 1.3$

HERE GOD CREATES CIRCLES, WAVES, AND FRACTALS

[M]

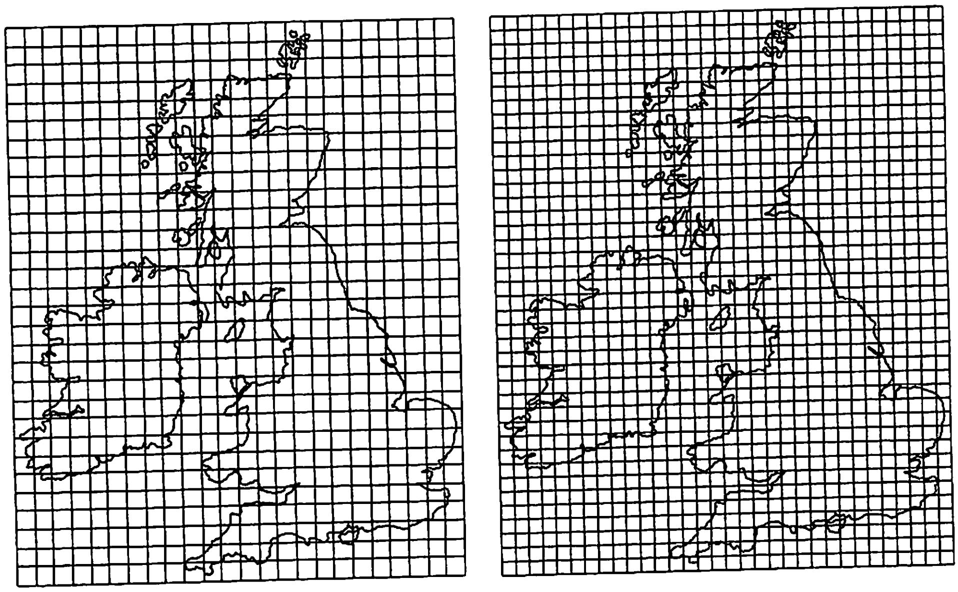
第3節の図



$N\delta = 40$

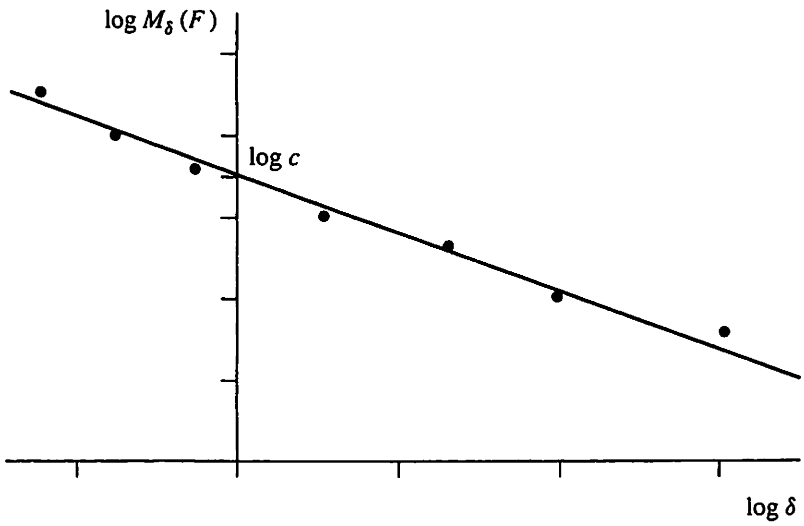
Fig. 11

イギリスの海岸線のボックス次元を求める.



[P]

コンパス次元を求めるための $\log\delta - \log M\delta$ のプロットの例

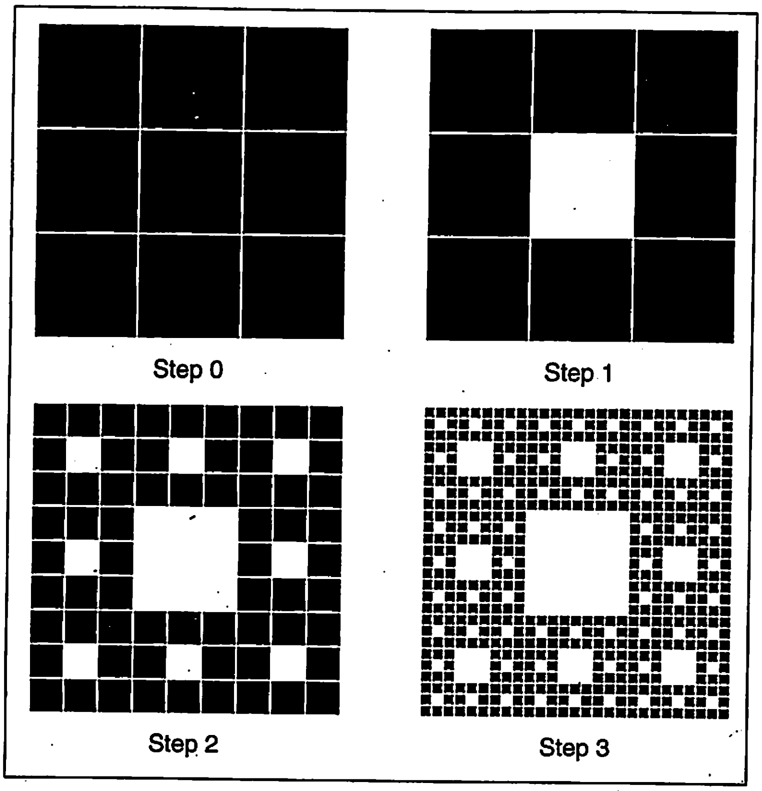


べき法則 $M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$ を仮定したときの，実測による集合 F の次元の評価.

Fig. 13
[Fa]

図 E1.

シェルピンスキー・カーペット



Sierpinski Carpet

The basic construction steps of the Sierpinski carpet.

(1)

d_H = ______

[P]

ボックス・フラクタル

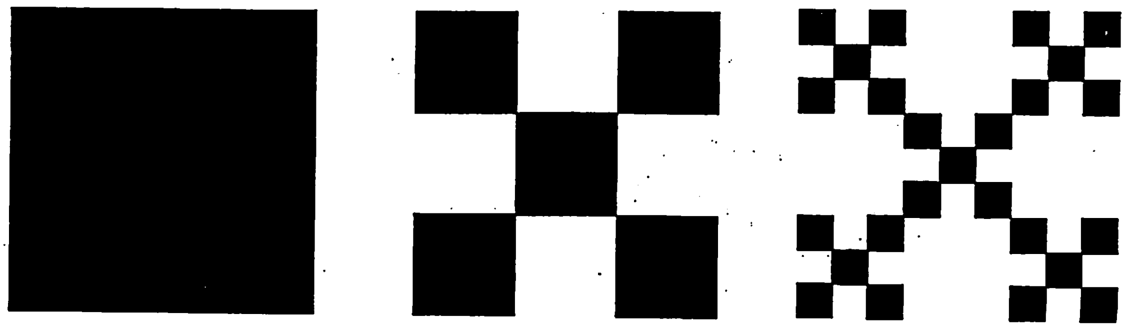
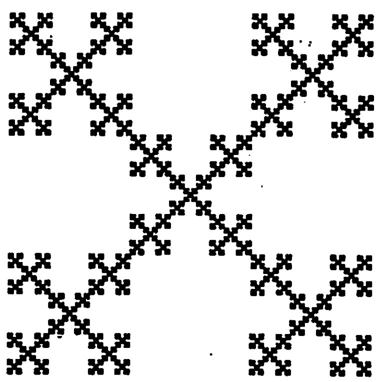


Fig. 14.6 Construction of the box fractal.

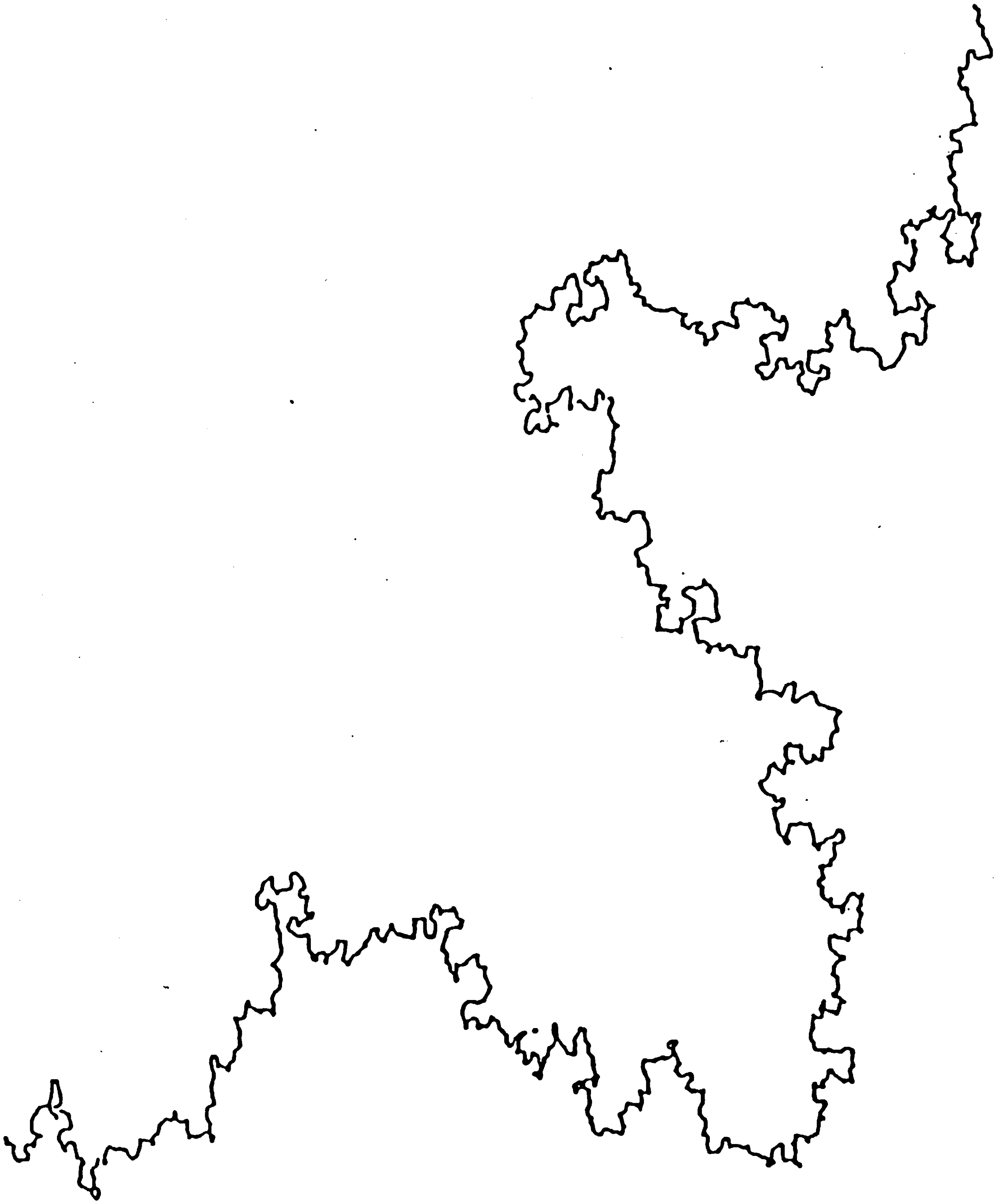


(2)

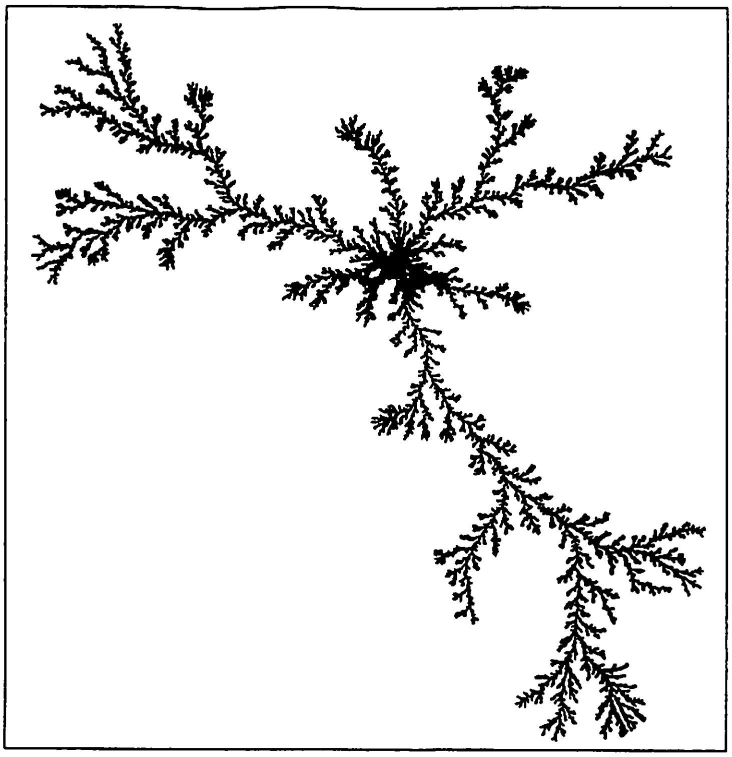
d_H = ______

[D]

図E2.

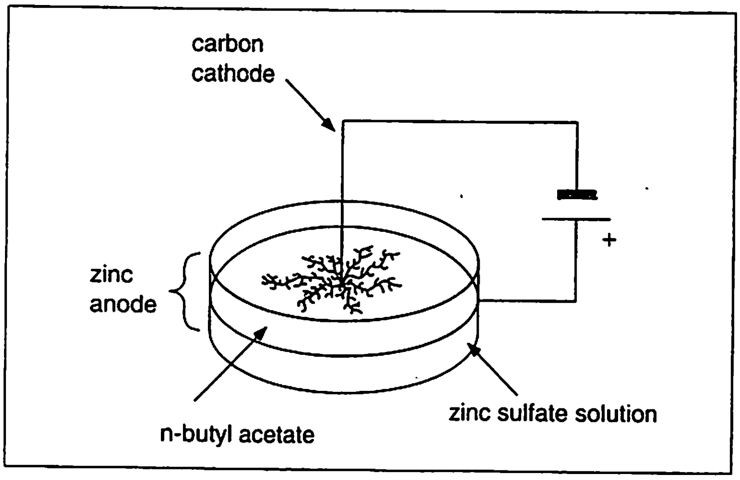


一見リアス式海岸に似ている.
スクイッグ曲線



Sample Result

This dendritic growth pattern was produced in only about 15 minutes by Peter Plath, University of Bremen. The reproduction here is in about the original size. The real zinc dendrite looks very attractive due to its metallic shiny character.

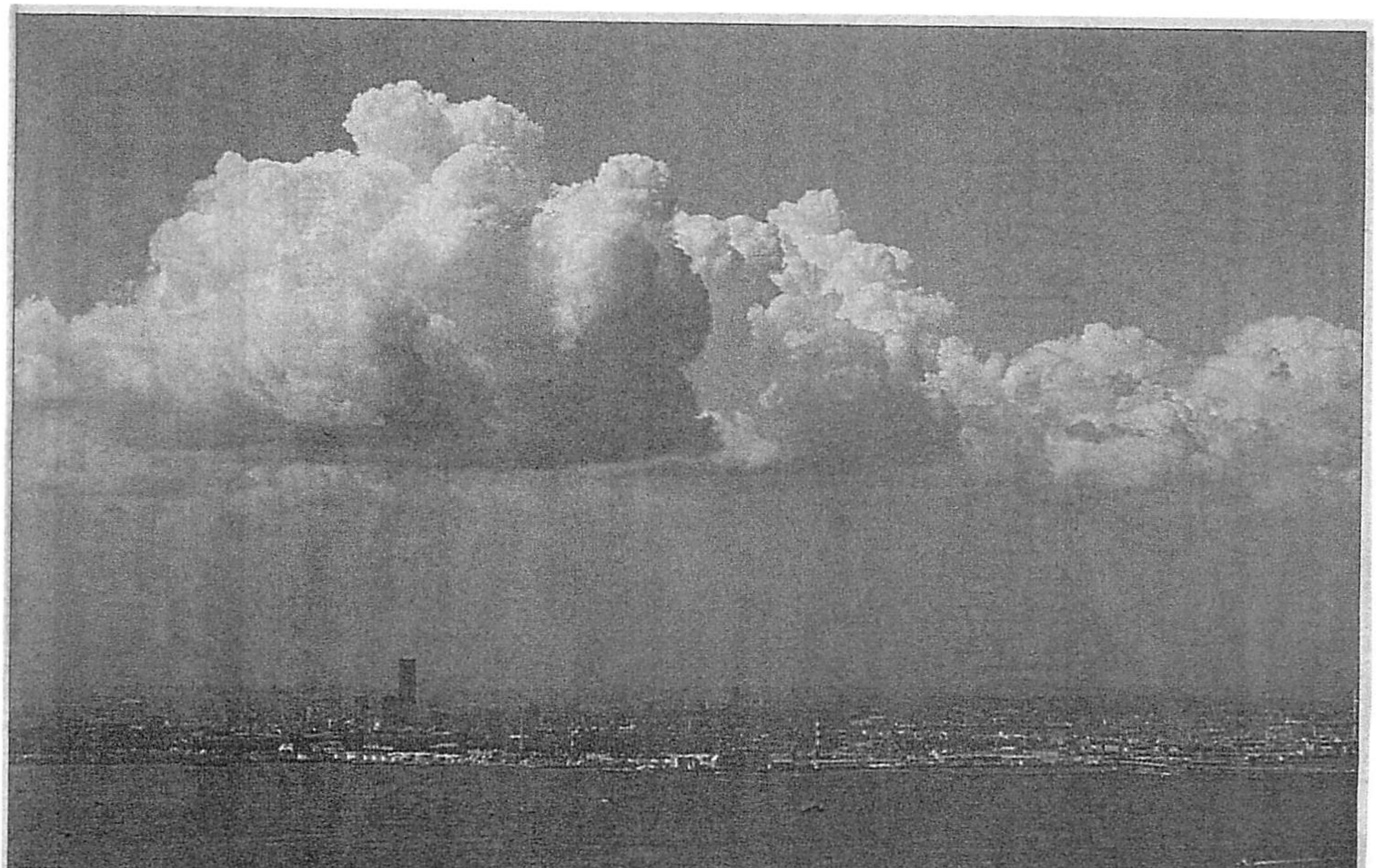


Electrodecomposition   *A fractal in chemistry*

The Petri-dish contains a solution of zinc sulfate ($ZnSO_4$). A beautiful fractal pattern of shiny zinc is produced by the application of a voltage.

[Ha]

硫酸亜鉛の電気分解によって析出した亜鉛。フラクタル状の枝分かれが見られる。



猛暑で発生 横浜市の上空にでた入道雲。下の超高層ビルはランドマークタワー。気象庁の天気相談所によると、上空に寒気がないのにこれだけ多くの入道雲がでるのは地上の気温が高く風が弱いためで、まさに今夏の猛暑の象徴という＝10日午後２時すぎ、東京湾上空で、本社ヘリから

1994.8.10の朝日新聞に載った入道雲。雲の境界はコッホ曲線のようにぎざぎざしている。

引用文献

[H] 本田勝也『フラクタル』朝倉書店

[Ha] Harrison, *Fractals in chemistry*, Oxford Science Publications

[Mat] 松下貢 『医学・生物学におけるフラクタル』朝倉書店

[M] Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman （邦訳あり）

[D] Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison Wesley

[Fa] Falconer, *Fractal geometry*, Wiley and Sons （邦訳あり）

[Fe] Feder, *Fractals*, Plenum Press （邦訳あり）

[P] Peitgen 他, *Chaos and fractals*, Springer

[S] Stoyan, *Fractals, random shapes and point fields*, Wiley and Sons

[T] 高安秀樹『フラクタル』朝倉書店