

## 吊橋の固有振動計算法\*

## NATURAL VIBRATION ANALYSIS OF SUSPENSION BRIDGES

前田 幸雄\*\*・林

正\*\*\*・前田 研一\*\*\*\*

By Yukio MAEDA, Masa HAYASHI and Ken-ichi MAEDA

## 1. 緒 言

吊橋の固有振動計算法は、静的問題の場合と同様に、吊橋特有の理論である従来の撓度理論に基づくものと、近年、特に脚光を浴びつつあるマトリックス解析法を用いた有限変形理論に基づくものとの、2種の計算法に大別することができる。

撓度理論による3径間対称吊橋の鉛直たわみ固有振動計算法<sup>1),2)</sup>は、まず、単純支持の場合について、Bleichら<sup>3)</sup>が線形化撓度理論に基づく振動の基礎微分方程式の一種の厳密解を誘導しているが、同時に、近似波形として正弦波形を用いるエネルギー法をも示し、両者の比較を行っている。そして、連続支持の場合については、Klöppelら<sup>5)</sup>がFourier級数を用いて基礎微分方程式から出発する計算法を与えているほか、Bleichら<sup>3)</sup>およびHawranekら<sup>4)</sup>が座屈波形および境界条件を満足する近似波形をそれぞれ用いるエネルギー法を示している。もちろん、これら以外にも各種の計算法があるが、それらを含めて、Bleichらのエネルギー法がその簡便性から、もっともよく使用されているようである。ただし、多径間吊橋の計算法については、基礎微分方程式を解くことはもちろん、エネルギー法においても、一般性を有する適当な近似波形を決定することが容易ではなかったことから、ほとんど検討されていない<sup>6)</sup>。

しかしながら、撓度理論による従来の鉛直たわみ固有振動計算法の最大の障害は、補剛桁の遊動円木振動の連成の影響を考慮に入れていないことである。遊動円木振動が固有振動性状に与える影響は多大であると予想されているが、それにもかかわらず、この問題に関して言及

されることは少ない。倉西<sup>7)</sup>は遊動円木振動の連成の影響をハンガーの傾斜による補剛桁の位置エネルギーの増加として取扱い、単径間吊橋に対してエネルギー最小原理に基づき検討を加えている。また、Selberg<sup>8)</sup>はハンガーの傾斜を考慮した非線形の連立基礎微分方程式を誘導し、ケーブル付加張力の水平成分およびケーブル質量の分布状態を近似的に仮定することによって、単純支持吊橋に対する半ば解析的な解を試みている。単径間吊橋の場合には、実験値との比較を行い、解の妥当性についての考察を施している。さらに、上原<sup>9)</sup>は任意径間数、任意支持条件の吊橋に対処するために、Selbergの基礎微分方程式を変形関数の導入により離散化する方法を示しているが、撓度理論と有限変形理論の中間的な計算法であり、撓度理論による計算法の持つ簡便性がある程度低下することは避けられない。

一方、有限変形理論の発展に伴い、吊橋の橋軸面内の固有振動問題もマトリックス法振動解析<sup>10)~13)</sup>の一問題として取扱うことが可能になり、たとえば、林・保田<sup>14)</sup>およびChaudhuryら<sup>15)</sup>が、軸力部材の剛性に初期引張力による横剛性(後者では、gravity stiffnessと呼んでいる)の項を導入し、吊橋の固有振動計算を行っている。後者は鉛直たわみのみしか考慮していないので問題があるが、林・保田の計算法は信頼性のある計算結果を与えると思われる。ただし、初期引張力による横剛性の項は有限要素法における通常の線形化固有振動問題に対応する、初期軸ひずみを考慮した接線剛性行列の非線形項<sup>16)~18)</sup>として、一般化されるものである。

さて、有限変形理論に基づく計算法が、撓度理論に基づくものに比較して、より信頼性のある結果を与えることは当然である。しかし、前者の欠点は非常に大きな記憶容量および非常に長い計算時間を要することであり、現在でも、実際設計の試算段階では、後者の計算法が用いられているようである。したがって、もし、撓度理論に基づく計算法において、多径間吊橋への適用、さらに

\* 第30回年次学術講演会<sup>19)</sup>にて一部発表済

\*\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

\*\*\*\* 学生会員 工修 大阪大学大学院工学研究科博士課程土木工学専攻(現・川田工業(株)技術本部研究室)

は、遊動円木振動の連成の影響の考慮も可能になり、しかも、最大の利点である簡便性が失われないならば、この計算法と有限変形理論に基づく計算法とを併用することにより、吊橋の動的設計がかなり合理的になると思われる。

以上の観点から、本文では、まず、任意径間数および任意支持条件の吊橋に対し、線形化撓度理論に基づく鉛直たわみ振動の基礎微分方程式の一種の厳密解を求める計算法を提案する。この厳密解を求めるには超越方程式を解く必要があることから、従来は敬遠されてきたが、電子計算機が高速化および数値計算技法が発達した現在では、ほとんど問題にはならない。

次に、上述の厳密解および3径間対称吊橋に対する従来の Bleich らのエネルギー法による解について、遊動円木振動の連成の影響を考慮する補正計算法を提案する。この計算法は、倉西が単径間吊橋の検討に用いた方法を修正、拡張するものであり、任意形式吊橋に対し、補剛桁橋軸方向の種々の拘束条件に対応する解を与えることができるようになっている。

そして、有限変形理論に基づく計算法については、林・保田の方法を有限要素法の線形化固有振動問題として、一般化することを試みる。

最後に、本文で新たに提案する撓度理論に基づく計算法の妥当性、簡便性の検討および従来の計算法との対応を考え、各種数値計算例を用いて、有限変形理論に基づく計算法による結果と比較、考察を行う。さらに、それらの考察の結果および遊動円木振動の連成の影響に関するパラメトリックス解析から、吊橋の合理的な固有振動解析法について論ずる。

## 2. 撓度理論

### (1) 線形化撓度理論に基づく基礎微分方程式の厳密解

線形化撓度理論に基づいて、無限小要素に働く内力と、外力である慣性力とのつり合いを表わした吊橋の鉛直たわみ固有振動問題の基礎微分方程式は、静的問題における通常の仮定のほか、次のような仮定を用いている。

仮定 [1] 補剛桁の遊動円木振動の連成の影響は考慮しない。

仮定 [2] ケーブルの橋軸方向移動によって生ずる慣性力の影響は無視する。

着目した無限小要素の属する径間において、分布死荷重  $w$  および補剛桁の曲げ剛性  $EI$  が一定であるとするならば、 $H_w$  および  $g$  をそれぞれ死荷重によるケーブル初期張力の水平成分および重力加速度として、基礎微分

方程式は、次式のように与えられる。

$$\frac{gEI}{w} \cdot \frac{d^4 \eta(x)}{dx^4} - \frac{gH_w}{w} \cdot \frac{d^2 \eta(x)}{dx^2} + \frac{g}{H_w} \cdot h = \omega^2 \eta(x) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\eta(x)$  および  $\omega$  は、それぞれ、固有モードの振幅および固有円振動数である。また、 $h$  は慣性力によるケーブル付加張力の水平成分に対応する定数であり、この径間 (径間長:  $L$ ) において成立するケーブル方程式

$$h \cdot \int_0^L \frac{\sec^3 \varphi(x)}{E_c A_c} dx - \frac{w}{H_w} \int_0^L \eta(x) dx = -\delta^l + \delta^r \dots\dots\dots (2)$$

によって、 $\eta(x)$  と結びつけられる。ここに、 $\sec^3 \varphi(x)/E_c A_c$  および  $\delta^l, \delta^r$  は、それぞれ、無限小要素での単位量の付加張力の水平成分によるケーブルの伸びの水平成分およびケーブルの左右端点での橋軸方向の移動量である。

本節では、任意径間数および任意支持条件の吊橋に対して、常微分方程式である式 (1) の厳密解を求める計算法を提案する。なお、ここでは、便宜上、対称吊橋の場合について説明するが、非対称吊橋の場合もまったく同様に扱える。

いま、図-1 に示すような総径間数  $n$  の多径間対称吊橋をモデルとし、対称性から、中央径間を含む左側の  $m$  径間を考える。ここに、 $m$  は次のような値である。

$$m = (n+1)/2$$

常微分方程式である式 (1) の解は、第1径間から第  $(m-1)$  径間までにおいて、第  $i$  径間の諸量に添字  $i$  を付すことにすれば、

$$\begin{aligned} \eta_i(x_i) = & A_i \cos \mu_i \frac{x_i}{L_i} + B_i \sin \mu_i \frac{x_i}{L_i} \\ & + C_i \cosh \nu_i \frac{x_i}{L_i} + D_i \sinh \nu_i \frac{x_i}{L_i} \\ & + \frac{g}{\omega^2 H_w} \cdot h_i \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

なる式で与えられ、第  $m$  径間、すなわち、中央径間においては、固有モードの逆対称性および対称性からそれぞれに対応して、次の2式

逆対称モード:

$$\eta_m(x_m) = E_m \cdot \sin \mu_m \left( \frac{1}{2} - \frac{x_m}{L_m} \right)$$

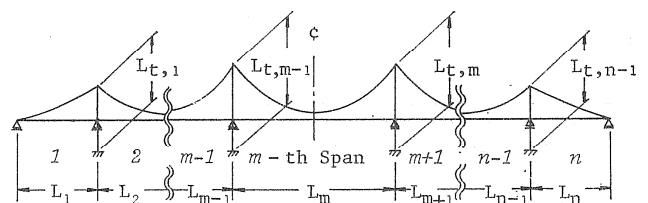


図-1 多径間対称吊橋

$$+ F_m \cdot \sinh \nu_m \left( \frac{1}{2} - \frac{x_m}{L_m} \right) + \frac{g}{\omega^2 H_w} h_m$$

.....(4.1)

対称モード：

$$\eta_m(x_m) = E_m \cdot \cos \mu_m \left( \frac{1}{2} - \frac{x_m}{L_m} \right)$$

$$+ F_m \cdot \cosh \nu_m \left( \frac{1}{2} - \frac{x_m}{L_m} \right) + \frac{g}{\omega^2 H_w} h_m$$

.....(4.2)

与えられる。逆対称モードの場合、式(2)で表わされたケーブル方程式からも明らかなように、中央径間では、ケーブル付加張力の水平成分  $h_m$  の項は必要ないが、計算の便宜上、この項を残しておく。ここに、 $\mu_i, \nu_i$  は、次のような量である。

$$\mu_i = \left\{ \frac{H_w L_i^2}{2 E I_i} \left( \sqrt{1 + \frac{4 w_i E I_i}{H_w^2 g} \omega^2} - 1 \right) \right\}^{1/2}$$

$$\nu_i = \left\{ \frac{H_w L_i^2}{2 E I_i} \left( \sqrt{1 + \frac{4 w_i E I_i}{H_w^2 g} \omega^2} + 1 \right) \right\}^{1/2}$$

(i=1, 2, ..., m)

式(3)および式(4)に含まれる  $(4m-2)$  個、すなわち、 $2n$  個の未知積分定数  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i=1, 2, \dots, m-1$ )、および、 $E_m, F_m$  は同じ個数の境界条件式によって決定される量である。その境界条件式は、左端支持点において、

$$\eta_1(0) = 0, \quad E I_1 \cdot \eta_1''(0) = 0 \dots\dots\dots(5)$$

であり、中間支持点においては、連続支持、および、単純支持にそれぞれ対応して、

連続支持：

$$\left. \begin{aligned} \eta_{i-1}(L_{i-1}) &= 0 \\ E I_{i-1} \cdot \eta_{i-1}'(L_{i-1}) &= E I_i \cdot \eta_i'(0) \\ E I_{i-1} \cdot \eta_{i-1}''(L_{i-1}) &= E I_i \cdot \eta_i''(0) \\ \eta_i(0) &= 0 \quad (i=2, 3, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.1)$$

単純支持：

$$\left. \begin{aligned} \eta_{i-1}(L_{i-1}) &= 0, \quad E I_{i-1} \cdot \eta_{i-1}''(L_{i-1}) = 0 \\ E I_i \cdot \eta_i''(0) &= 0, \quad \eta_i(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2)$$

.....(6.2)

である。そこで、式(5)および式(6)に、式(3),(4)を代入すると、

$$A \cdot a = H \cdot h \dots\dots\dots(7)$$

なるマトリックス関係式が得られる。ここに、ベクトル  $a$ 、および、 $h$  は

$$a = \{ A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, A_i, B_i, C_i, D_i, \dots, A_{m-1}, B_{m-1}, C_{m-1}, D_{m-1}, E_m, F_m \}^T$$

$$h = \{ h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_{m-1}, h_m \}^T$$

であり、 $A$ 、および、 $H$  はそれぞれ、大きさ  $2n \times 2n$ 、および、 $2n \times m$  の係数マトリックスである。参考のため

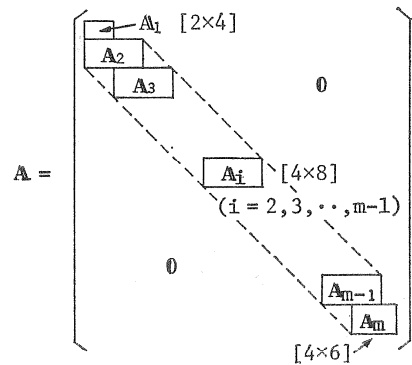


図-2 係数マトリックス A

めに、図-2に、 $A$ の構成図を示しておく。なお、この図-2の各行列  $A_i$  は付録-1に示す。

また、式(3)、および、式(4)に含まれる  $m$  個の未知定数  $h_i$  は式(2)より、

$$h_i \int_0^{L_i} \frac{\sec^3 \varphi_i(x_i)}{E_c A_c} dx_i - \frac{w_i}{H_w} \int_0^{L_i} \eta_i(x_i) dx_i$$

$$= -\delta_i^l + \delta_i^r \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots(8)$$

なる式で、 $\eta_i(x_i)$  と結びつけられる。ここに、 $\delta_i^l, \delta_i^r$  は塔の下端を固定端とし、塔の高さ、および、曲げ剛性をそれぞれ、 $L_{t,i}, EI_{t,i}$  とすると、 $i=1, 2, \dots, m-1$  についで、

$$\delta_1^l = 0, \quad \delta_1^r = -\frac{L_{t,1}^3}{3 EI_{t,1}} (h_1 - h_2) \dots\dots\dots(9)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_i^l &= -\frac{L_{t,i-1}^3}{3 EI_{t,i-1}} (h_{i-1} - h_i) \\ \delta_i^r &= -\frac{L_{t,i}^3}{3 EI_{t,i}} (h_i - h_{i+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

(i=2, 3, ..., m-1)

であり、 $i=m$  については、固有モードの逆対称性、および、対称性から、それぞれに対応して、

逆対称モード：

$$\left. \begin{aligned} \delta_m^l &= -\frac{L_{t,m-1}^3}{3 EI_{t,m-1}} (h_{m-1} - h_m) \\ \delta_m^r &= -\frac{L_{t,m-1}^3}{3 EI_{t,m-1}} \{ h_m - (-h_{m-1}) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11.1)$$

対称モード：

$$\left. \begin{aligned} \delta_m^l &= -\frac{L_{t,m-1}^3}{3 EI_{t,m-1}} (h_{m-1} - h_m) \\ \delta_m^r &= -\frac{L_{t,m-1}^3}{3 EI_{t,m-1}} \{ h_m - (+h_{m-1}) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11.2)$$

となる。ただし、ケーブル付加張力の鉛直成分による塔の移動に関する項は省略してある。そこで、式(8)に式(3),(4)、および、式(9)~(11)を代入すると、ベクトル  $a$  と  $h$  のもう一つの関係式として、

$$G \cdot a = E \cdot h \dots\dots\dots(12)$$

なるマトリックス式が得られる。ここに、 $G, E$  はそれぞれ、大きさ  $m \times 2n$ 、および、 $m \times m$  の係数マトリックスである。参考のために、図-3に、 $G$  の構成図を示し

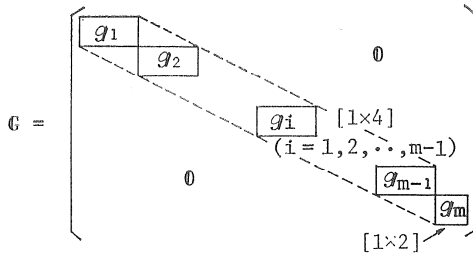


図-3 係数マトリックス G

しておく。なお、この 図-3 の各ベクトル  $g_i$  は 付録-2 に示す。

ゆえに、式 (7)、および、式 (12) から、ベクトル  $h$  を消去すれば、 $a$  に関する同次方程式

$$(A - H \cdot E^{-1} \cdot G) \cdot a = 0 \dots \dots \dots (13)$$

が得られ、同次方程式が自明でない解を持つ条件から、

$$\det / A - H \cdot E^{-1} \cdot G / = 0 \dots \dots \dots (14)$$

なる振動数方程式が、固有円振動数  $\omega$  に関する超越方程式として求められる。ここに、上式は、大きさ  $2n \times 2n$  の行列式である。

したがって、式 (14) で表わされた振動数方程式を解き、 $\omega$  を求めれば、式 (13) から、ベクトル  $a$  の各要素の相対値が、さらに、この  $a$  を代入して式 (12) から、 $h$  の各要素の相対値が決定され、固有モードが相対量として求められる。ただし、単純支持の中間支持点がある場合、逆対称モードが一部の径間において独立となることがあるため、ベクトル  $a$  の要素の相対値を求める際は、基準値とする未知積分定数の選択に注意しなければならない。

(2) 遊動円木振動の連成の影響を考慮した解の補正

任意形式吊橋に対して、前節で誘導した、線形化撓度理論に基づく鉛直たわみ振動の基礎微分方程式の厳密解は、仮定にも示したように、補剛桁の遊動円木振動の連成の影響、および、ケーブルの橋軸方向移動によって生ずる慣性力の影響が考慮されていない。そこで、本節では、これらの影響を考慮する補正計算法を補剛桁の種々の橋軸方向拘束条件に対応し、エネルギー最小原理に基づいて、誘導、提案する。なお、この計算法は、3 径間対称吊橋に対する従来の Bleich らによるエネルギー法の解も補正することができる。

ここでは、便宜上、中間支持点がすべて連続支持の対称吊橋の場合のみを説明するが、単純支持点を含む場合、さらに、非対称吊橋の場合も扱えることは、前節と同様である。対称吊橋の場合、対称モードについては、明らかに、橋軸方向の問題を考える必要はないため、逆対称モードについてのみ説明することにする。いま、

仮定 [1] 遊動円木振動の連成の影響は、ハンガーの傾斜による補剛桁の位置エネルギーの増加

として取扱う。

仮定 [2] 補剛桁の遊動円木振動による橋軸方向移動量  $\xi_s$  は補剛桁全長にわたって一定である。

仮定 [3] 中央径間の中央点にセンター・タイがある場合には、 $\xi_s$  はその点でのケーブルの橋軸方向移動量  $\xi_{c,m}(L_m/2)$  と等しい。

仮定 [4] 補剛桁、および、ケーブル振動の鉛直方向成分は影響を無視することができ、前節の鉛直たわみ振動の基礎微分方程式の厳密解  $\eta_i(x_i)$  をそのまま用いることができる。

仮定 [5] ケーブルの橋軸方向移動量  $\xi_{c,i}(x_i)$  は影響を無視することができ、鉛直方向の振動成分  $\eta_i(x_i)$ 、および、付加張力の水平成分  $h_i$  により、

$$\xi_{c,i}(x_i) = \delta_i^l + h_i \cdot \int_0^{x_i} \frac{\sec^3 \varphi_i(X_i)}{E_c A_c} dX_i + \eta_i(x_i) \cdot \tan \varphi_i(x_i) - \frac{w_i}{H_w} \int_0^{x_i} \eta_i(X_i) dX_i \dots \dots \dots (15)$$

なる式で表わすことができる。

仮定 [6] ケーブル付加張力の水平成分  $h_i$  は影響を無視することができ、各径間において定数である前節の厳密解をそのまま用いることができる。

のような仮定を用いれば、運動エネルギー、および、位置エネルギーの最大値  $T, V$  は塔に関するエネルギーを省略して、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} T &= \omega^2 \left\{ T_\eta + 2 \sum_{i=1}^{m-1} (T_{s,i} + T_{c,i}) + T_{s,m} + T_{c,m} \right\} \\ V &= V_\eta + 2 \sum_{i=1}^{m-1} V_{s,i} + V_{s,m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

なる式で与えられる。ここに、まず、 $T_\eta, V_\eta$  は従来の Bleich らのエネルギー法に用いられた項であり、

$$\left. \begin{aligned} T_\eta &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{w_i}{g} \int_0^{L_i} \eta_i^2(x_i) dx_i + \frac{w_m}{g} \int_0^{L_m} \eta_m^2(x_m) dx_m \right. \\ V_\eta &= \frac{1}{2} \left[ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ EI_i \int_0^{L_i} \eta_i''^2(x_i) dx_i - H_w \int_0^{L_i} \eta_i''(x_i) \cdot \eta_i(x_i) dx_i + \frac{w_i}{H_w} h_i \int_0^{L_i} \eta_i(x_i) dx_i \right\} \right. \\ &\quad \left. + EI_m \int_0^{L_m} \eta_m''^2(x_m) dx_m - H_w \int_0^{L_m} \eta_m''(x_m) \cdot \eta_m(x_m) dx_m \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (17)$$

なる式で示される。そして、 $T_{s,i}, V_{s,i}$ 、および、 $T_{c,i}$  がそれぞれ、遊動円木振動、および、ケーブルの橋軸方

向慣性力に関する項である。これらは  $w_{s,i}$ ,  $w_{c,i}$ , および  $f_i(x_i)$  をそれぞれ、補剛桁部分、ケーブル部分の分布死荷重、および、補剛桁とケーブルの垂距を表わす関数として、次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} T_{s,i} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{s,i}}{g} \cdot \xi_s^2 \cdot L_i \\ T_{c,i} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{w_{c,i}}{g} \int_0^{L_i} \xi_{c,i}^2(x_i) dx_i \\ V_{s,i} &= \int_0^{L_i} w_{s,i} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{\xi_s - \xi_{c,i}(x_i)}{f_i(x_i)} \right\} \right] f_i(x_i) dx_i \\ &\doteq \frac{1}{2} w_{s,i} \int_0^{L_i} \frac{\{\xi_s - \xi_{c,i}(x_i)\}^2}{f_i(x_i)} dx_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

したがって、エネルギー最小原理を適用するために、式(16)~(18)の  $\eta_i(x_i)$ ,  $h_i$ , および  $\xi_{c,i}(x_i)$  をそれぞれ、それらに未知定数  $\alpha$  を乗じたものに置き換えると、最小原理における条件式

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial\xi_s} = 0 \quad (19)$$

から、 $\alpha$ , および  $\xi_s$  に関する、次式のような同次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot \omega^2 - b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & a_{22} \cdot \omega^2 - b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \xi_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 T_\eta + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{w_{c,i}}{g} \int_0^{L_i} \xi_{c,i}^2(x_i) dx_i \\ &\quad + \frac{w_{c,m}}{g} \int_0^{L_m} \xi_{c,m}^2(x_m) dx_m \\ b_{11} &= 2 V_\eta + 2 \sum_{i=1}^{m-1} w_{s,i} \int_0^{L_i} \frac{\xi_{c,i}^2(x_i)}{f_i(x_i)} dx_i \\ &\quad + w_{s,m} \int_0^{L_m} \frac{\xi_{c,m}^2(x_m)}{f_m(x_m)} dx_m \\ b_{12} &= 2 \sum_{i=1}^{m-1} w_{s,i} \int_0^{L_i} \frac{\xi_{c,i}(x_i)}{f_i(x_i)} dx_i \\ &\quad + w_{s,m} \int_0^{L_m} \frac{\xi_{c,m}(x_m)}{f_m(x_m)} dx_m \\ b_{21} &= b_{12} \\ a_{22} &= 2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{w_{s,i}}{g} \cdot L_i + \frac{w_{s,m}}{g} \cdot L_m \\ b_{22} &= 2 \sum_{i=1}^{m-1} w_{s,i} \int_0^{L_i} \frac{1}{f_i(x_i)} dx_i \\ &\quad + w_{s,m} \int_0^{L_m} \frac{1}{f_m(x_m)} dx_m \end{aligned}$$

である。その結果、補剛桁の種々の橋軸方向拘束条件に対応し、固有円振動数  $\omega$  の補正解、および補剛桁の遊動円木振動の鉛直たわみ振動に対する振幅比  $\xi_s/\alpha$  が次のようにして求められる。ただし式(20)において、 $b_{12} = b_{21} = 0$  の場合は遊動円木振動が連成しないことから、式(19)の最初の条件式のみが有効であり、補剛桁が橋軸方向に拘束されている場合と同じ解を持つことになる。

a) 橋軸方向非拘束の場合

同次方程式が自明でない解を持つ条件から、 $\omega^2$  に関する二次方程式が得られ、根の公式より、 $\omega^2$  の補正された解が求められる。

$$\omega^2 = \frac{(a_{11} \cdot b_{22} + a_{22} \cdot b_{11}) \pm \sqrt{(a_{11} \cdot b_{22} + a_{22} \cdot b_{11})^2 - 4 a_{11} \cdot a_{22} (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21})}}{2 a_{11} \cdot a_{22}} \quad (21)$$

この二次方程式の判別式は、明らかに正であり、さらに、Schwarz の不等式から

$$b_{11} \cdot b_{22} > b_{12} \cdot b_{21}$$

であるゆえ、式(21)で表わされた  $\omega^2$  の二根は、ともに正根であることが解る。このことは、すなわち、同じ鉛直たわみ振動モードでありながら、固有円振動数の異なる、そして、当然、遊動円木振動の振幅比の異なる、二種の固有振動が存在することを意味している。

b) 中央径間中央点にセンター・タイがある場合

仮定[3]により、 $\xi_s$  が定数となり、式(19)の最初の条件式のみから、 $\omega^2$  に関する一次方程式が得られ、 $\omega^2$  の補正された解が、一種類のみ、次のように求められる。

$$\omega^2 = \frac{b_{11} - b_{12} \cdot \xi_{c,m}(L_m/2)}{a_{11}} \quad (22)$$

c) 橋軸方向拘束の場合

$\xi_s = 0$  となり、上述の場合と同様にして、 $\omega^2$  の補正された解が、一種類のみ、次のように求められる。

$$\omega^2 = \frac{b_{11}}{a_{11}} \quad (23)$$

したがって、以上のようにして、各拘束条件の場合について、 $\omega^2$  の補正された解が求められれば、式(20)から、振幅比  $\xi_s/\alpha$  が計算されることになる。

### 3. 有限変形理論

#### (1) 初期軸ひずみと無応力長

吊橋の各径間において、補剛桁の剛性は変化するが、分布死荷重は近似的に等分布であるとする。そして、撓

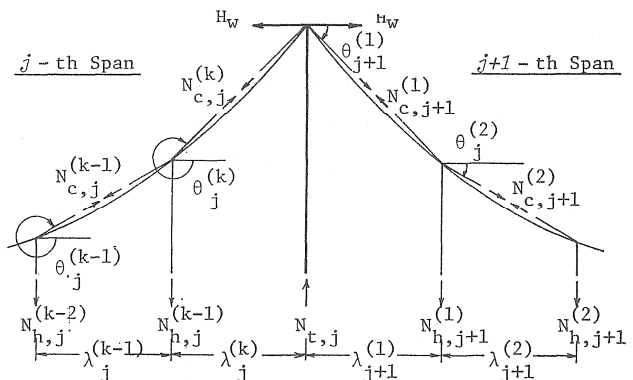


図-4 初期軸力の分布

度理論の場合と同様に、死荷重時では、補剛桁が無応力状態にあり、死荷重をケーブル、ハンガー、および、塔のみで支えている状態にあるとする。

したがって、死荷重によるケーブル初期張力の水平成分  $H_w$  が全径間について一定であり、その結果、塔が直立していると考え、ケーブルは所定のサグを有する放物線形状となり、初期軸力  $N_c$  の分布が容易に得られる。しかし、ここでは、さらに、図-4 に示すように、ケーブルを折れ線で近似し、各部分の軸力を次式で与えることにする。すなわち、ケーブルが  $k$  本の折れ線によって分割される  $j$  番目の径間において、

$$N_{c,j}^{(i)} = H_w \cdot \sec \theta_j^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad \dots\dots\dots(24)$$

である。

また、ハンガー、および、塔の初期軸力、 $N_h, N_t$  は同様に、図-4 の記号を用いて、

$$N_{h,j}^{(i)} = \frac{w_s}{2} (\lambda_j^{(i)} + \lambda_j^{(i+1)}) \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$N_{t,j} = -H_w (\tan \theta_j^{(k)} + \tan \theta_{j+1}^{(1)}) \quad \dots\dots\dots(26)$$

なる式で与えられることになる。ここに、 $w_s$  は、補剛桁部分のみの分布死荷重である。

ゆえに、式 (24)~(26) によって、ケーブル、ハンガー、および、塔の初期軸力  $N$  の分布を計算すれば、伸び剛性を  $EA$ 、初期長を  $l$  として、

$$\epsilon = \frac{N}{EA}, \quad l_0 = \frac{l}{1 + N/EA} \quad \dots\dots\dots(27)$$

なる式から、それぞれの初期軸ひずみ  $\epsilon$ 、および、無応力長  $l_0$  を算定することができる。

本章では、式 (27) で算定される初期軸ひずみ  $\epsilon$ 、および、無応力長  $l_0$  を用いて、有限変形理論に基づく有限要素法の線形化固有振動問題として、吊橋の橋軸面内の固有振動問題を一般化することを試みる。

(2) 固有値問題

有限要素法の線形化固有振動問題において、初期軸ひずみ  $\epsilon$  を有する伸び剛性  $EA$ 、無応力長  $l_0$  の部材の接線剛性マトリックス  $k(\epsilon)$  は、

$$k(\epsilon) = k_0 + k_g(\epsilon) \quad \dots\dots\dots(28)$$

なる式で与えられる。ここに、 $k_0$  は通常の線形剛性マトリックスであり、 $k_g(\epsilon)$  は、軸力部材、および、曲げ部材に対して、それぞれ、次のような式で与えられる。

軸力部材 :

$$k_g(\epsilon) = \frac{EA}{l_0} \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(29.1)$$

曲げ部材 :

$$k_g(\epsilon) = \frac{EA}{l_0} \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5 & l_0/10 & 0 & -6/5 & l_0/10 \\ & & 2l_0^2/15 & 0 & -l_0/10 & -l_0^2/30 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6/5 & -l_0/10 \\ \text{Symm.} & & & & & 2l_0^2/15 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(29.2)$$

ゆえに、 $k(\epsilon)$  を構造全体についてまとめて得られる接線剛性マトリックス  $K(\epsilon)$  を用いれば、固有振動問題に対応し、変位ベクトル  $U$  に関する同次方程式が  $M$  を質量マトリックスとして、

$$K(\epsilon) \cdot U = \omega^2 \cdot M \cdot U \quad \dots\dots\dots(30)$$

なる式で得られ、

$$\det/K(\epsilon) - \omega^2 \cdot M = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

なる固有値問題が求められる。

したがって、式 (31) で表わされた固有値問題を解き、固有円振動数  $\omega$  を求めれば、式 (30) から、 $U$  の各要素の相対値が求まり、固有モードが決定されることになる。

4. 数値計算

(1) 計算例

2. で提案した、撓度理論に基づく吊橋の固有振動計算法の妥当性、簡便性の検討、および、従来のエネルギー法との対応を考え、本章では、次のような各種の計算例を用いて、前章で説明した有限変形理論に基づく計算法による結果と比較、考察を行う。

まず、3 径間対称吊橋の例として、本四架橋案の一つである南備讃瀬戸大橋 (中央径間長 : 1 100 m) の諸元を参考に、図-5 に示すような変断面補剛トラスを有する吊橋を考える。比較のために、補剛構造として、図-5 に示したトラス構造を含めて、次のような 4 種の場合を考える。

- a) 変断面トラス構造
- b) 換算等価剛性の変断面桁
- c) 換算等価剛性を各径間において平均した平均断面桁

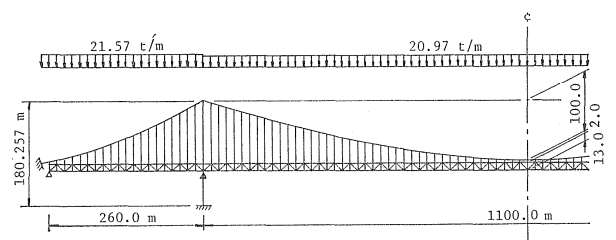


図-5 3 径間吊橋

表-1 3 径間吊橋の断面諸量

Member				A [m <sup>2</sup> ]	I [m <sup>4</sup> ]	E [t/m <sup>2</sup> ]
Stiffening frame	Truss (vari.)	Upper chord	Conti.	0.1165~0.2475	0.0	2.1×10 <sup>7</sup>
		Lower chord		0.1272~0.2110	0.0	
	Girder (variable)	0.2437~0.4585		10.2765~19.2489		
	Girder (average)	0.2805, 0.2652		11.7530, 11.1821		
	Girder (uniform)	Simple		0.2437	10.2765	
Tower				1.8265	20.9310	2.1×10 <sup>7</sup>
Main cable				0.7705	0.0	2.0×10 <sup>7</sup>
Hanger cable				0.0066	0.0	1.4×10 <sup>7</sup>

表-2 5 径間吊橋の断面諸量

Member				A [m <sup>2</sup> ]	I [m <sup>4</sup> ]	E [t/m <sup>2</sup> ]
Stiffening frame	Girder (variable)		Conti.	0.0938~0.1331	3.9546~5.6118	2.1×10 <sup>7</sup>
	Girder (average)			0.1000, 0.1024, 0.1030	4.2162, 4.3190, 4.3443	
	Girder (uniform)			Simple	0.0938	
Tower		Out-side		1.4579	8.1957	2.1×10 <sup>7</sup>
		In-side		1.7230	13.4670	
Main cable				0.2758	0.0	2.0×10 <sup>7</sup>
Hanger cable				0.0066	0.0	1.4×10 <sup>7</sup>

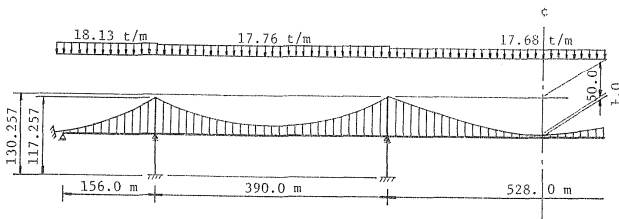


図-6 5 径間吊橋

d) 換算等価剛性の最小断面を全径間について用いた等断面桁

そして中間支持条件は, a), b), c) の補剛構造の場合について, 連続支持, d) の場合について, 単純支持とした. おおこの場合の断面諸量を 表-1 に示す.

また, 多径間対称吊橋の例として, 本四架橋案の 5 径間吊橋の径間長配分を参考に, 橋長が上述の 3 径間の場合と等しい, 図-6 に示すような 5 径間吊橋を考える. 補剛構造は, 次のような 3 種の場合を考える.

- a) 変断面桁
- b) 剛性を各径間において平均した平均断面桁
- c) 剛性の最小断面を全径間について用いた等断面桁

そして, 中間支持条件は, a), b) の補剛構造の場合について, すべて連続支持とし, c) の場合について, 中央径間に関するもののみを単純支持とした. おおこの場合の断面諸量を 表-2 に示す.

なお, 数値計算手法については, 超越方程式の解法として, および, 多次元帯対称行列で表現される固有値問題の解法として, それぞれ, Regula-Falsi 法<sup>20)</sup>, および,

Sturm Sequence 法<sup>21)</sup>を用いる.

(2) エネルギー法による解と厳密解

撓度理論に基づく計算法において, 従来のエネルギー法による解と基礎微分方程式の厳密解との対応を考え, 3 径間対称吊橋について, 連続支持の平均断面桁, および, 単純支持の等断面桁の各場合に対し, 計算を行った.

計算結果の一部として, 各次の固有周期を 表-3 に示す.

単純支持の場合については, Bleich らがすでに報告しているが, 表-3 から解るように, 連続支持の場合についても, エネルギー法による解と厳密解との差異はほとんどない.

したがって, 3 径間吊橋に対しては, より簡便なことから, 従来のエネルギー法が有効であると思われる.

表-3 3 径間吊橋の固有周期 (sec)

Calcu. meth.	Stiff. frame		Asymmetric mode			Symmetric mode		
			1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
Deflec. theory (Ener. meth.)	Girder (aver.)	Conti.	7.38	3.14	—	5.80	4.40	2.54
	Girder (uni.)	Simple	8.17	3.29	3.07	5.98	4.48	2.73
Deflec. theory (Exact sol.)	Girder (aver.)	Conti.	7.38	3.19	2.42	5.65	4.39	2.53
	Girder (uni.)	Simple	8.17	3.29	3.07	5.98	4.48	2.74

(3) 撓度理論と有限変形理論

撓度理論に基づく計算法の妥当性, 簡便性を検討するために, 3 径間, および, 5 径間対称吊橋について, 連続支持の平均断面桁, および, 単純支持の等価断面桁の各場合に対し, 基礎微分方程式の厳密解を計算した. そして, 有限変形理論に基づく計算法による, すべての種類の補剛構造, 中間支持条件の各場合に対する計算結果と比較した. ただし, 両計算法を対応させるために, 後者の計算法では, 橋軸方向の慣性力を省略してある.

計算結果の一部として, 各次の固有周期を表-4, 5 に, 固有モードを図-7, 8 に示す. なお, 固有モードについては, 両計算法の結果にほとんど差がないため, 撓度理論に基づく計算法による結果のみを示した.

これらの表-4, 5, および, 図-7, 8 からわかるように, 両計算法の結果は非常によく一致している. そして, 補剛構造について, トラス構造と換算桁との差異, および, 変断面桁と平均断面桁との差異はほとんどない.

また, 参考のために, 計算時間について触れると, 数値計算手法における初期値の設定の仕方によって若干の違いがあるものの, 撓度理論に基づく計算法は, 有限変形理論に基づく計算法の 10 数分の 1 であった.

ゆえに, 本文の厳密解を求める計算法は実用上, 十分

表-4 3 径間吊橋の固有周期 (sec)

Calcu. meth.	Stiff. frame		Asymmetric mode			Symmetric mode		
			1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
Finite defor. theory	Truss (vari.)	Conti.	7.42	3.26	2.61	5.78	4.46	2.64
	Girder (vari.)		7.35	3.20	2.49	5.74	4.41	2.58
	Girder (aver.)		7.38	3.16	2.52	5.75	4.39	2.56
	Girder (uni.)	Simple	8.03	3.31	3.12	6.02	4.52	2.81
Deflec. theory (Exact sol.)	Girder (aver.)	Conti.	7.38	3.19	2.42	5.65	4.39	2.53
	Girder (uni.)	Simple	8.17	3.29	3.07	5.98	4.48	2.74

表-5 5 径間吊橋の固有周期 (sec)

Calcu. meth.	Stiff. frame		Asymmetric mode			Symmetric mode		
			1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
Finite defor. theory	Girder (vari.)	Conti.	5.93	3.76	2.35	8.35	3.30	2.54
	Girder (aver.)		5.97	3.77	2.33	8.34	3.28	2.53
	Girder (uni.)	Simple	6.46	4.62	2.69	8.43	3.33	2.68
Deflec. theory (Exact sol.)	Girder (aver.)	Conti.	5.98	3.80	2.38	8.34	3.25	2.59
	Girder (uni.)	Simple	6.54	4.57	2.69	8.43	3.28	2.69

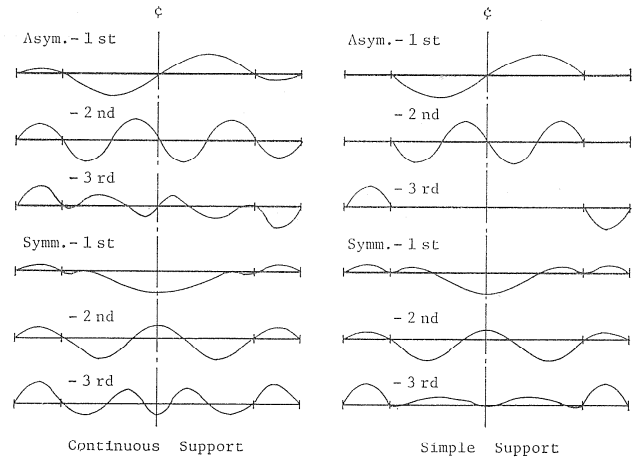


図-7 3 径間吊橋の固有モード

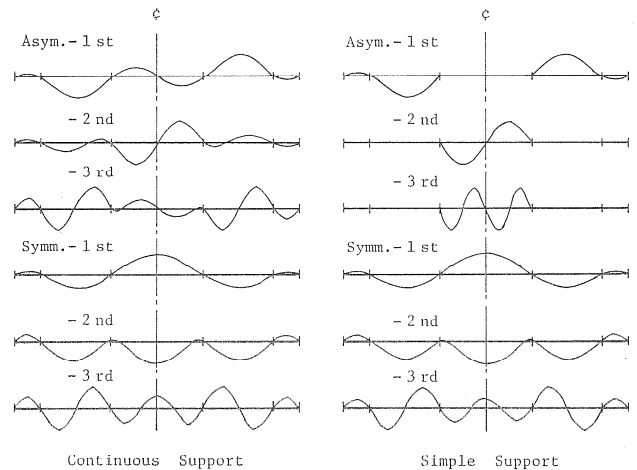


図-8 5 径間吊橋の固有モード

妥当であり, これを用いれば, 従来, 撓度理論では扱い得なかった任意径間数, および, 任意支持形式の吊橋の固有振動計算を行うことができる. しかも, 計算時間が大幅に短縮されるのみならず, 必要とする記憶容量はきわめて小であり, また, 計算プログラムの開発も容易であることなどから, 有限変形理論に基づく計算法に比較して, かなり簡便な実用的解法であるといえる.

(4) 遊動円木振動の連成の影響

撓度理論に基づく計算法において, 逆対称振動での補剛桁の遊動円木振動の連成の影響を考慮する補正計算法の妥当性を検討するために, 有限変形理論に基づく計算法とともに, 3 径間対称吊橋について, 連続支持の平均断面桁, および, 単純支持の等断面桁の各場合に対し, 計算を行った. そして, 補剛桁橋軸方向の拘束条件としては, 非拘束, 中央径間中央点にセンター・タイの設定, および, 拘束の 3 種の条件を考えた.

計算結果の一部として, 逆対称一次振動での固有周期と遊動円木振動の鉛直たわみ振動に対する振幅比を表-6 に示す. ここに, 振幅比の符号は, ケーブルの橋軸



表-6 逆対称1次振動の固有周期と遊動円木振動の振幅比

Calcu. meth.	Stiff. frame		Axial restraint condition					
			Unrestraint		Center-tie		Restraint	
			Period (sec)	Ampli. (ratio)	Period (sec)	Ampli. (ratio)	Period (sec)	Ampli. (ratio)
Finite defor. theory	Girder (aver.)	Conti.	8.50 6.43	+0.77 -0.61	7.68	+0.21	7.12	0.0
	Girder (uni.)	Simple	8.86 6.04	+0.54 -1.38	8.44	+0.23	7.74	0.0
Deflec. theory	Girder (aver.)	Conti.	8.42 6.28	+0.70 -0.69	7.46	+0.22	7.12	0.0
	Girder (uni.)	Simple	8.94 5.97	+0.49 -1.47	8.29	+0.23	7.80	0.0

方向移動の方向と同方向を正とする。なお、第1次モード以外の逆対称振動では、連成せず、影響がみられなかったため、省略した。

両計算法の結果は、表-6 から解るように、よく一致している。さらに、この結果からは、遊動円木振動が、次のような性状を有することが解る。すなわち、補剛桁が橋軸方向に非拘束の場合には、固有円振動数の補正計算式の説明において本文で述べたように、同じ鉛直たわみ振動モードでありながら、遊動円木振動の異なる、そして、当然、固有周期の異なる二種の固有振動が存在し

ている。これらの二種の固有振動は、補剛桁がケーブルの橋軸方向移動と同方向、および、反対方向の両方向で平衡状態になり得ることから、それぞれに対応して生ずるものと思われる。また、センター・タイ、および、拘束がある場合には、同様に本文で述べたように、ただ一種類の固有振動が存在するだけである。前者の固有周期は後者に比較して当然長い、両者とも、非拘束の場合の二種の固有周期の中間的な値である。

ゆえに、以上のことから、本文の補正計算法は、簡易試算計算法として、実用上、十分な精度を有し、これを用いれば、従来の撓度理論では導入し得なかった、補剛桁の遊動円木振動の連成の影響を任意形式の吊橋に対して考慮できる。

(5) 遊動円木振動とパラメーター

撓度理論に基づく計算法は、厳密解法により基礎微分方程式の解を一度求めておけば、補正計算法により遊動円木振動の連成の影響に関するパラメトリックス解析を

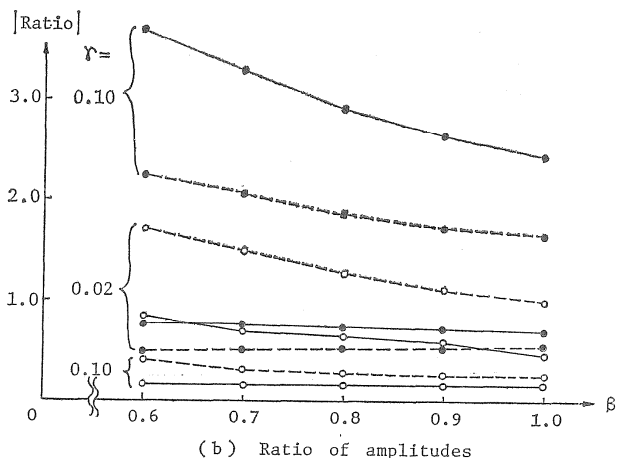
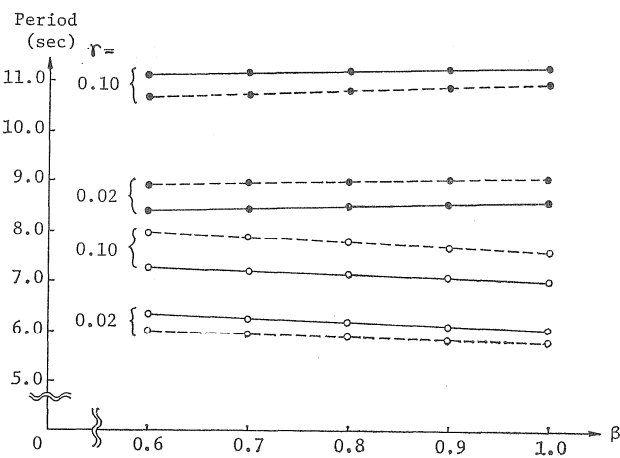


図-9 逆対称1次振動の固有周期と遊動円木振動の振幅比

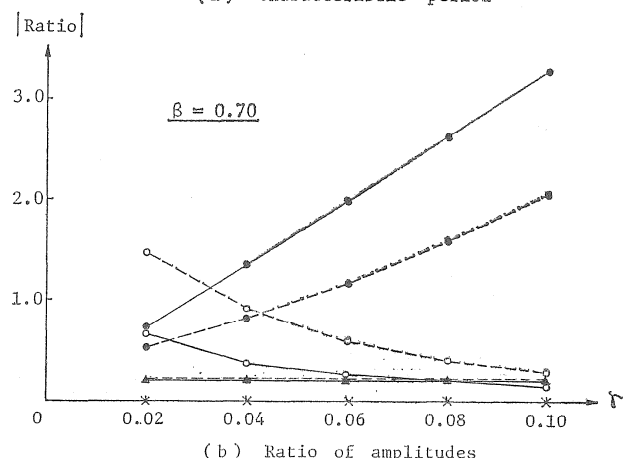
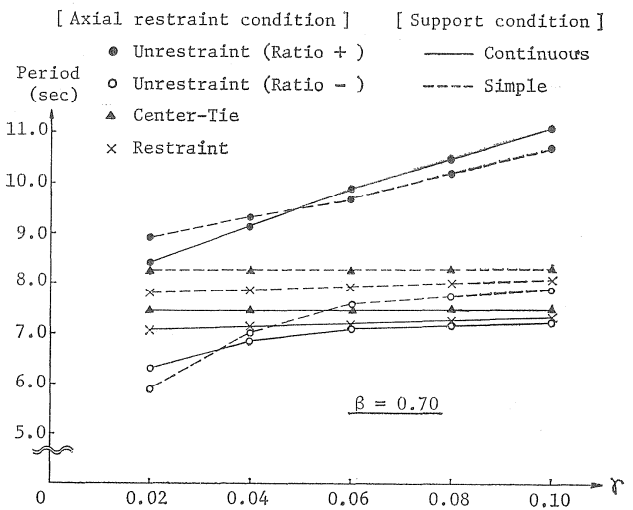


図-10 逆対称1次振動の固有周期と遊動円木振動の振幅比

## 【付録—1】

本文の図—2 の各行列  $A_i$  は次のような内容である。

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -EI_i \left( \frac{\mu_i}{L_i} \right)^2 & 0 & EI_i \left( \frac{\nu_i}{L_i} \right)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

連続支持 :

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \mu_{i-1} & \sin \mu_{i-1} & \cosh \nu_{i-1} & \sinh \nu_{i-1} \\ -EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \sin \mu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \cos \mu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \sinh \nu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right) \cosh \nu_{i-1} \\ -EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \cos \mu_{i-1} & -EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \sin \mu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \cosh \nu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \sinh \nu_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

単純支持 :

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \mu_{i-1} & \sin \mu_{i-1} & \cosh \nu_{i-1} & \sinh \nu_{i-1} \\ -EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \cos \mu_{i-1} & -EI_{i-1} \left( \frac{\mu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \sin \mu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \cosh \nu_{i-1} & EI_{i-1} \left( \frac{\nu_{i-1}}{L_{i-1}} \right)^2 \sinh \nu_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

連続支持・逆対称モード :

$$A_m = \begin{bmatrix} \cos \mu_{m-1} & \sin \mu_{m-1} & \cosh \nu_{m-1} & \sinh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \cos \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \sinh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \cosh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cos \mu_{m-1} & -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cosh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sinh \nu_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

連続支持・対称モード :

$$A_m = \begin{bmatrix} \cos \mu_{m-1} & \sin \mu_{m-1} & \cosh \nu_{m-1} & \sinh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \cos \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \sinh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right) \cosh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cos \mu_{m-1} & -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cosh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sinh \nu_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

単純支持・逆対称モード :

$$A_m = \begin{bmatrix} \cos \mu_{m-1} & \sin \mu_{m-1} & \cosh \nu_{m-1} & \sinh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cos \mu_{m-1} & -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cosh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sinh \nu_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

単純支持・対称モード :

$$A_m = \begin{bmatrix} \cos \mu_{m-1} & \sin \mu_{m-1} & \cosh \nu_{m-1} & \sinh \nu_{m-1} \\ -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cos \mu_{m-1} & -EI_{m-1} \left( \frac{\mu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sin \mu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \cosh \nu_{m-1} & EI_{m-1} \left( \frac{\nu_{m-1}}{L_{m-1}} \right)^2 \sinh \nu_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EI_i \left( \frac{\mu_i}{L_i} \right) & 0 & -EI_i \left( \frac{\nu_i}{L_i} \right) \\ EI_i \left( \frac{\mu_i}{L_i} \right)^2 & 0 & -EI_i \left( \frac{\nu_i}{L_i} \right)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -EI_i \left( \frac{\mu_i}{L_i} \right)^2 & 0 & EI_i \left( \frac{\nu_i}{L_i} \right)^2 & 0 \end{array} \right] \quad (i=2, 3, \dots, m-1)$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right) \cos \frac{\mu_m}{2} & EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right) \cosh \frac{\nu_m}{2} \\ EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right)^2 \sin \frac{\mu_m}{2} & -EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right)^2 \sinh \frac{\nu_m}{2} \\ \sin \frac{\mu_m}{2} & \sinh \frac{\nu_m}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right) \sin \frac{\mu_m}{2} & EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right) \sinh \frac{\nu_m}{2} \\ EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right)^2 \cos \frac{\mu_m}{2} & -EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right)^2 \cosh \frac{\nu_m}{2} \\ \cos \frac{\mu_m}{2} & \cosh \frac{\nu_m}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sin \frac{\mu_m}{2} & \sinh \frac{\nu_m}{2} \\ -EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right)^2 \sin \frac{\mu_m}{2} & EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right)^2 \sinh \frac{\nu_m}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \frac{\mu_m}{2} & \cosh \frac{\nu_m}{2} \\ -EI_m \left( \frac{\mu_m}{L_m} \right)^2 \cos \frac{\mu_m}{2} & EI_m \left( \frac{\nu_m}{L_m} \right)^2 \cosh \frac{\nu_m}{2} \end{array} \right]$$

【付録-2】

図-3の各ベクトル  $g_i$  は次のような内容である。

$$g_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i}{H_w} \cdot \frac{L_i}{\mu_i} \sin \mu_i, \quad -\frac{w_i}{H_w} \cdot \frac{L_i}{\mu_i} (\cos \mu_i - 1), \\ \frac{w_i}{H_w} \cdot \frac{L_i}{\nu_i} \sinh \nu_i, \quad \frac{w_i}{H_w} \cdot \frac{L_i}{\nu_i} (\cosh \nu_i - 1) \end{array} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

逆対称モード：

$$g_m = \{ 0, 0 \}$$

対称モード：

$$g_m = \left\{ \frac{w_m}{H_w} \cdot \frac{L_m}{\mu_m} \cdot 2 \sin \frac{\mu_m}{2}, \quad \frac{w_m}{H_w} \cdot \frac{L_m}{\nu_m} \cdot 2 \sinh \frac{\nu_m}{2} \right\}$$

容易に行えることが明らかである。

参考のために、本節に、遊動円木振動に関する代表的なパラメーターであると思われる、中央径間における

$$\beta = \frac{w_s}{w}, \quad r = \frac{h_c}{f}$$

なる2種のパラメーターを考え、3径間対称吊橋について、パラメトリックス解析を行った例を示しておく。ここに、 $w_s, w, h_c$ 、および、 $f$ はそれぞれ、補剛桁部分のみの分布死荷重、全分布死荷重、中央点でのハンガー長、およびケーブルのサグを表わす。

計算結果の一部として、各パラメーターに対応する固有周期、および、遊動円木振動の鉛直たわみ振動に対する振幅比の値を補剛桁橋軸方向の各種拘束条件について、図-9、および、図-10にそれぞれ示す。

本解析例からは、次のようなことが言える。すなわち、図-9、および、図-10から解るように、橋軸方向非拘束の場合、まず、パラメーター： $\beta$ について、 $\beta$ の値の影響は振幅比に対して顕著であるが、固有周期にはほとんど現われない。そして、パラメーター： $r$ については $r$ の値の影響が固有周期、および、振幅比の双方に対して顕著である。また、センター・タイ、および、拘束のある場合は、両者のパラメーターの影響は、ほとんどみられない。

5. 結 言

本文は、撓度理論に基づく吊橋の鉛直たわみ固有振動計算法において、多径間吊橋への適用、および、補剛桁遊動円木振動の連成の影響を考慮した方法をそれぞれ提案し、そして、有限変形理論に基づく計算法については、有限要素法の線形化固有振動問題として一般化することを試みたものである。

各種の数値計算例を用いて、計算結果の比較、検討を

行った結果からは、次のようなことがいえる。

(1) 線形化撓度理論に基づく基礎微分方程式の厳密解を求める計算法を用いれば、撓度理論に基づく計算法の最大の利点である簡便性を失うことなく、任意径間数、および、任意支持形式の吊橋の固有振動計算を行うことができる。

(2) 撓度理論に基づく計算法による解について、遊動円木振動の連成の影響を考慮する補正計算法は、簡易試算計算法としての実用上十分な精度を満足し、しかも、遊動円木振動の連成の影響に関するパラメトリックス解析を容易に行うことができる。

したがって、提案した撓度理論に基づく計算法、および、有限変形理論に基づくものとを併用すれば、より合理的な吊橋の固有振動解析が可能であると思われる。

なお、本研究に際して、当時、大阪大学土木工学科4年次学生であった内田雅夫(現・日本国有鉄道)、および、三浦健也(現・長大橋設計センター)の両君の労に対し、ここに謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) 平井 敦：鋼橋 III, 技報堂, pp. 420~453, 1967.
- 2) 川田忠樹：吊橋の設計と施工, 理工図書, pp. 257~385, 1965.
- 3) Bleich, F. et al. : The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U.S. Gov. Printing Office, Washington, 1950 (猪瀬, 高田訳：吊橋の振動解析, 森北出版).
- 4) Hawranek, A. und Steinhardt, O. : Theory und Berechnung der Stahlbrücken, Springer Verlag, 1958 (小松・橘訳：鋼橋の理論と計算, 山海堂, pp. 395~442).
- 5) Klöppel, K. und K.H. Lie : Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken, Ing. Archiv., XIII, 1952.
- 6) 本州四国連絡鉄道吊橋技術調査委員会編：橋梁専門部会報告, 日本鉄道建設公団・本州四国連絡橋公団, 1970.
- 7) 倉西 茂：ダンパーによる吊橋のたわみ振動の制動について, 土木学会論文集, No. 142, 1967.
- 8) Selberg, A. : Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, ACTA Polytechnica, Scandinavia, Ci 13, 1961.
- 9) 上原七司：吊橋の振動解析に関する計算法的考察, 土木学会論文集, No. 235, 1975.
- 10) 戸川隼人：有限要素法による振動解析, サイエンス社, 1975.
- 11) 川井忠彦：マトリックス法振動および応答(コンピュータによる構造工学講座 I-4), 培風館, 1971.
- 12) 山本・山田：マトリックス構造解析の誤差論(コンピュータによる構造工学講座 II-5), 培風館, pp. 133~148, 1972.
- 13) Przemieniecki, J.S. : Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968 (山田・川井訳：マトリックス構造解析の基礎理論, 培風館, pp. 240~310).
- 14) 林・保田：吊橋の振動解析, 第28回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1973.
- 15) Chaudhury, N.K. and D.M. Brotton : Analysis of Vertical Flexural Oscillations of Suspension Bridges by Digital Computer, Int. J. Sympo. on Suspension Bridges, Lisbon, 1966.
- 16) 山田嘉昭：マトリックス法の応用, 東京大学出版会, pp. 181~206, 1972.
- 17) 上田幸雄：骨組構造解析(コンピュータによる構造工学講座 II-1), 培風館, pp. 250~266, 1971.
- 18) Martin, H.C. : Finite Elements and the Analysis of Geometrically Non-Linear Problems, Japan-U.S. Seminar, Tokyo, 1969.
- 19) 前田・林・前田：吊橋の振動解析に関する二、三の考察, 第30回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1975.
- 20) たとえば, 磯田・大野：Fortranによる数値計算ハンドブック, オーム社, pp. 419~466, 1971.
- 21) Gupta, K.K. : Eigenproblem Solution by a Combined Sturm Sequence and Inverse Iteration Technique, Int. J. for Num. Meth. in Engin., Vol. 7, 1973.

(1976.6.3・受付)