

# 幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の 動的応答計算法\*

CALCULATION TECHNIQUES FOR DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS  
SUBJECTED TO GEOMETRICAL NONLINEARITY

前田 幸雄\*\*・林 正\*\*\*・前田 研一\*\*\*\*  
By Yukio MAEDA, Masa HAYASHI and Ken-ichi MAEDA

## 1. 緒 言

有限要素法による構造物の非線形問題の静的解析に用いられる計算手法は、すでに、多くの研究者達によって種々の手法が提案されている<sup>1)~7)</sup>が、主に、増分法 (incremental method), 修正増分法 (modified incremental method), および、増分法と反復法を併用する混合法 (mixed method) の 3 種の手法が用いられている。

動的解析に用いられる計算手法にも同様の各種手法が応用されており<sup>8), 9)</sup>, たとえば, Clough ら<sup>10), 11)</sup>, Wilson ら<sup>12)</sup>, および, Bathe ら<sup>13)</sup>が, 上述の 3 種の手法を応用する直接積分法 (direct integration method) を, それぞれ提案している. しかしながら, 動的解析においては, 数値積分を行う際に慣性力を補間する必要があり, それによる過度の打ち切り誤差 (truncation error) を生じさせない範囲の時間間隔に対応して非常に多くの増分段階に分割しなければならず, 各増分段階で反復収束計算を伴う混合法を応用する手法は, 計算時間が増大する欠点がある. したがって, 実際問題では, 増分法, あるいは, 修正増分法を応用する手法が用いられることが多いが, これらの手法の場合には, 打ち切り誤差のみならず, 各増分段階で非線形剛性行列を線形化することによる過度の累積誤差 (accumulation error) にも留意しなければならず, 線形化剛性行列の精度が計算手法の合理性を左右することになるため, より正確な線形化剛性行列の提案が今後の課題であると思われる. それにもかかわらず, このような観点からの研究としては, Argyris ら<sup>14)</sup>が, 各増分段階での線形化剛性行列として, 従来の

接線剛性行列 (tangential stiffness matrix) の替わりに, 数学的意味での修正剛性行列 (modified stiffness matrix) を用いることを提案している以外には, ほとんどみられない.

他方, 動的解析に特有な計算法として, モード重畳法 (mode superposition method) がある. 従来は, 線形問題の解析に用いられる計算法であったが, 最近, たとえば, 伊藤<sup>16)</sup>, および, 中尾・高野<sup>17), 18)</sup>が, 材料非線形問題の動的解析に適用する手法を提案している. この手法は, 直接積分法によるものと比較して, 精度の点では劣るが, モード重畳法を適用できることにより, 記憶領域, および, 計算時間が大幅に減少するので, 非線形性の低い構造物の問題などには, 有効, かつ, 非常に合理的な手法である. そして, この手法は, 幾何学的非線形問題にも容易に拡張できるものである.

本文では, 幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答解析に用いられる新たな合理的計算法を直接積分法, および, モード重畳法にそれぞれ対応して, 2 種提案する.

まず, 直接積分法に対応するものとして, 推定割線剛性行列 (estimated chordal stiffness matrix) を各増分段階での線形化剛性行列とする計算法を提案する. この推定割線剛性行列とは, 前段階までに生じた節点変位の増分から各増分段階での未知増分を外挿し, 本文で誘導する大変形理論に基づく割線剛性行列を推定するものである.

次に, モード重畳法に対応するものとして, 非線形項に対応する付加擬荷重 (additional pseudoloads) を含む荷重増分を同様に, 前段階までの荷重増分から外挿する考え方を応用する計算法を提案する. Stricklin ら<sup>15)</sup>が類似の考え方に直接積分法を適用しているが, 本計算法はこれを拡張して, モード重畳法を適用するものである.

最後に, 本文で新たに提案する 2 種の計算法の妥当

\* 第 29 回年次学術講演会<sup>19)</sup>, および, 第 24 回応力連合講演会<sup>20)</sup>にて一部発表済

\*\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

\*\*\*\* 学生会員 工修 大阪大学大学院工学研究科博士過程  
土木工学専攻

性、合理性の検討、および、従来<sup>8)~18)</sup>の計算手法との対応を考え、各種数値計算例を用いて、計算結果の比較、考察を行う。

### 2. 運動方程式の増分形

有限要素法(変形法)による幾何学的非線形性を考慮した構造物の動的応答解析に対する運動方程式は、全体構造系について、D'Alembertの原理から節点慣性力ベクトルを基準座標系での節点加速度ベクトル  $\ddot{X}$  と質量行列  $M$  との積で表わせば、時刻  $t$  において、

$$R(X) = F(t) - M \cdot \ddot{X} \dots\dots\dots(1)$$

なる式で与えられる。ここに、 $R(X)$  は、内部抵抗力ベクトル注)とよばれるものであり、節点変位ベクトル  $X$  の二次以上の項も含んでいる。また、 $F(t)$  は外力ベクトルである。なお、ここでは便宜上、減衰項を省略する。

いま、時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  までの時間増分  $\Delta t$  に対して、節点変位ベクトルの増分  $\Delta X$  による内部抵抗力ベクトルの増分  $\Delta R(X, \Delta X)$  を

$$\Delta R(X, \Delta X) = \tilde{K}(X, \Delta X) \cdot \Delta X \dots\dots\dots(2)$$

なる式で表現できるとすると、式(1)で与えられる運動方程式の増分形が同様に、節点加速度ベクトルの増分を  $\Delta \ddot{X}$  として、次式のように求められる。

$$M \cdot \Delta \ddot{X} + \tilde{K}(X, \Delta X) \cdot \Delta X = F(t + \Delta t) - F(t) \dots\dots\dots(3)$$

そして、上式の  $\tilde{K}(X, \Delta X)$  をこの増分段階における割線剛性行列とよぶことにするが、当然、 $X$  のみならず、 $\Delta X$  に関する未知項も含んでいる。すなわち、上式は  $\Delta X$  に関する非線形の連立二階常微分方程式である。

### 3. 内部抵抗力ベクトルと割線剛性行列

大変形理論に基づいて、平面骨組構造物を対象とし、ある増分段階における増分前での内部抵抗力ベクトル  $R(X)$ 、および、割線剛性行列  $\tilde{K}(X, \Delta X)$  を誘導する。なお、構造物は等断面の直線材により構成されているものとし、また、ひずみと応力の関係は線形であるとする。

まず、着目する一部材要素の増分前での軸方向ひずみ  $\varepsilon$  を図-1のように、その変形状態で部材座標系を設定し、図中の記号を用いて、

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \dots\dots\dots(4)$$

なる式で表わすことにする。ここに、 $u, v$  は前段階ま

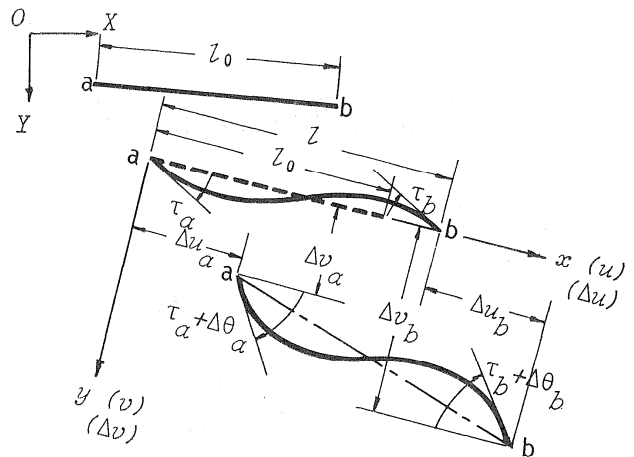


図-1 部材要素

での一種の総変位ではあるが、剛体変位を含まないため、上式は大変形問題にも、十分に適用できるものである。そして、同じ部材座標系で、この増分段階における軸方向ひずみの増分  $\Delta \varepsilon$  を同様に、図-1の記号を用いて、

$$\Delta \varepsilon = \frac{d(\Delta u)}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{d(\Delta v)}{dx} \right\}^2 - y \cdot \frac{d^2(\Delta v)}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d(\Delta v)}{dx} \dots\dots\dots(5)$$

なる式で表わす。上式は  $\Delta u, \Delta v$  による部材回転角の増分が大きい限り、十分な精度を有するものである。したがって、式(4),(5)から、ひずみエネルギーの増分  $\Delta U$  が次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= E \cdot \int \left( \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^2 \right) dV \\ &= \delta U + \delta^2 U + \frac{1}{2} E \cdot \int \left[ \left\{ \frac{d(\Delta u)}{dx} \right\} \cdot \left\{ \frac{d(\Delta v)}{dx} \right\}^2 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{d(\Delta v)}{dx} \right\}^4 \right] dV \\ &\quad + \frac{1}{2} E \cdot \int \left( \frac{dv}{dx} \right) \cdot \left\{ \frac{d(\Delta v)}{dx} \right\}^3 dV \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここに、 $\delta U$ 、および、 $\delta^2 U$  はそれぞれ、増分前でのひずみエネルギー  $U$  の第一、および、第二変分である。

次に、有限要素法の手法に従って、変位関数が導入されるわけであるが、図-1のように、増分前の変形状態で部材座標系を設定することにより、図中の記号を用いて、

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{x}{l_0} (l - l_0) \\ v &= \left( x - \frac{2x^2}{l_0} + \frac{x^3}{l_0^2} \right) \cdot \tau_a + \left( -\frac{x^2}{l_0} + \frac{x^3}{l_0^2} \right) \cdot \tau_b \\ \Delta u &= \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \cdot \Delta u_a + \frac{x}{l_0} \cdot \Delta u_b \\ \Delta v &= \left( 1 - \frac{3x^2}{l_0^2} + \frac{2x^3}{l_0^3} \right) \cdot \Delta v_a + \left( x - \frac{2x^2}{l_0} + \frac{x^3}{l_0^2} \right) \cdot \Delta \theta_a \\ &\quad + \left( \frac{3x^2}{l_0^2} - \frac{2x^3}{l_0^3} \right) \cdot \Delta v_b + \left( -\frac{x^2}{l_0} + \frac{x^3}{l_0^2} \right) \cdot \Delta \theta_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

なる変位関数を採用することになる。ここに、 $l_0$  は着目

注) 本用語は文献<sup>13)</sup>の“internal resisting force vector”の直訳である。

する部材要素の無応力長である。

したがって、式(6)で与えられるひずみエネルギーの増分  $\Delta U$  は増分前の変形状態での材端変位ベクトル  $\mathbf{u} = (0, 0, \tau_a, l-l_0, 0, \tau_b)$ , および、その増分  $\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_a, \Delta v_a, \Delta \theta_a, \Delta u_b, \Delta v_b, \Delta \theta_b)$  の関数として表現されることになる。

ゆえに、増分前での材端力ベクトルを  $\mathbf{p}$ , および、その増分を  $\Delta \mathbf{p}$  とすれば、 $\Delta \mathbf{u}$  に対する仮想変位  $\delta \Delta \mathbf{u}$  に関して、

$$(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \cdot \delta \Delta \mathbf{u} = \delta \Delta U \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる仮想仕事の原理から、Castigliano の第一定理により、この増分段階における増分後での着目する部材要素の材端力と材端変位との関係式が次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p} &= \{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1(\mathbf{u}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{u}^2)\} \cdot \mathbf{u} \\ &+ [\{\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1(\mathbf{u}) + 3\mathbf{k}_2(\mathbf{u}^2)\} \\ &+ \{\mathbf{k}_{11}(\Delta \mathbf{u}) + \mathbf{k}_2(\Delta \mathbf{u}^2)\} + \mathbf{k}_{11}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{k}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1$ , および、 $\mathbf{k}_2$  は  $\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}$  の内容は異なるが、それぞれ、従来<sup>9)</sup>の線形、および、一次、二次の非線形剛性行列と同じものである。そして、 $\mathbf{k}_{11}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$  は以下に示すような非線形剛性行列である。

$$\mathbf{k}_{11}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & -A & C \\ & & E & 0 & -B & D \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & A & -C \\ \text{Symm.} & & & & & F \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{9EA}{35l_0^2} \{3(\tau_a + \tau_b)(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &+ \tau_a \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 + \tau_b \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \\ B &= \frac{3EA}{140l_0} \{12\tau_a(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &- (\tau_a - \tau_b) \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 + (\tau_a + \tau_b) \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \\ C &= \frac{3EA}{140l_0} \{12\tau_b(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &+ (\tau_a + \tau_b) \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 + (\tau_a - \tau_b) \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \\ D &= \frac{EA}{140} \{3(\tau_a + \tau_b)(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &- (3\tau_a - 2\tau_b) \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 + (2\tau_a - 3\tau_b) \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \\ E &= \frac{EA}{140} \{-3(\tau_a - \tau_b)(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &+ 3(8\tau_a - \tau_b) \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 - (3\tau_a - 2\tau_b) \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \\ F &= \frac{EA}{140} \{3(\tau_a - \tau_b)(\Delta v_a - \Delta v_b) \\ &+ (2\tau_a - 3\tau_b) \cdot \Delta \theta_a \cdot l_0 - 3(\tau_a - 8\tau_b) \cdot \Delta \theta_b \cdot l_0\} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

そこで、式(9)において、 $\Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  を代入すると、

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (12)$$

なる式が得られ、当然、増分前での材端力と材端変位との関係を表わしている。しかも、増分前の変形状態で部材座標系を設定することにより、 $\mathbf{p}$  は明らかに、その状態での材端内部抵抗力に相当するものである。したがって、もし、増分前での節点変位ベクトル  $\mathbf{X}$  が既知であるならば、それによって容易に計算される  $\mathbf{u}$  から  $\mathbf{p}$  が決定され、座標変換行列  $\mathbf{c}(\mathbf{X})$  を乗じて全体構造系についてまとめると、内部抵抗力ベクトル  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  が与えられることになる。

さらに、また、式(12)により、式(9)は次式のように書き直される。

$$\Delta \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (13)$$

すなわち、上式は材端力の増分と材端変位の増分との関係を表わし、 $\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})$  がこの増分段階における割線剛性に相当することになる。したがって、同様に、 $\mathbf{c}(\mathbf{X})$  を用いて全体構造系についてまとめると、求める割線剛性行列  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X})$  が与えられる。なお、 $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X})$  は  $\Delta \mathbf{X}$  に関する未知項を含んでいるが、 $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{0}$  とすれば、 $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \mathbf{0})$  が接線剛性行列を表わすということは容易に確かめられる。

#### 4. 計算手法

幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答解析に対する運動方程式、および、その増分形は前章で誘導した内部抵抗力ベクトル  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ , 割線剛性行列  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X})$  を 2. の式(1), および、式(3)に代入して、それぞれ具体的に表現できる。本章では、非線形の連立二階常微分方程式である式(3)を線形化し、直接積分法、および、モード重畳法をそれぞれ適用する計算手法を2種説明、提案する。

##### (1) 直接積分法

各増分段階、たとえば、第  $(n+1)$  回目において、式(3)を次式のように線形化し、直接積分法を適用する。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_n, \Delta \mathbf{X}_{n+1}^*) \cdot \Delta \mathbf{X}_{n+1} \\ = \mathbf{F}(t_{n+1}) - \mathbf{F}(t_n) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_n, \Delta \mathbf{X}_{n+1}^*)$  は  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_n, \Delta \mathbf{X}_{n+1})$  に含まれる節点変位ベクトルの未知増分  $\Delta \mathbf{X}_{n+1}$  を前段階までの計算結果  $(\Delta \mathbf{X}_n, \Delta \mathbf{X}_{n-1}, \dots)$  から外挿的に推定する  $\Delta \mathbf{X}_{n+1}^*$  で置換するものであり、推定割線剛性行列とよぶことにする。

すなわち、本計算手法は、各増分段階における線形化剛性行列として、従来<sup>9)~13)</sup>のように接線剛性行列を用いる代わりに、この推定割線剛性行列を用いて、非線形剛性行列を線形化することによる累積誤差を低減することを目的とするものである。

$\tilde{K}(X_n, \Delta X_{n+1}^*)$  を決定する 節点変位ベクトルの推定増分  $\Delta X_{n+1}^*$  を外挿する計算式として、本文では

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{n+1}^* &= \Delta X_n & (n=1) \\ \Delta X_{n+1}^* &= 2\Delta X_n - \Delta X_{n-1} & (n=2) \\ \Delta X_{n+1}^* &= 3\Delta X_n - 3\Delta X_{n-1} + \Delta X_{n-2} & (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

なる差分式を採用する。動的応答解析では、数値積分に伴う押切り誤差による制約から非常に多くの増分段階を必要とする反面、各増分段階における割線剛性行列の非線形性がかかなり低下していることが予測され、節点変位の時間曲線が比較的滑らかな形をしている場合には、上式の差分式による  $\Delta X_{n+1}^*$  を用いる推定割線剛性行列は十分な精度を満足するものと思われる。

したがって、推定割線剛性行列  $\tilde{K}(X_n, \Delta X_{n+1}^*)$  を求めるための計算時間は、接線剛性行列  $\tilde{K}(X_n, \mathbf{0})$  の場合とほとんど差がない。そして、この点で、各増分段階において、二度、全体構造系での剛性行列を組む必要がある Argyris らの提案した修正剛性行列<sup>14)</sup> に比較して、推定割線剛性行列がはるかに優れていることは明らかである。なぜならば、平面骨組構造物はその種類によるが、剛性行列の帯幅が比較的狭く、 $\Delta X_{n+1}$  を求める計算時間の全体に対する割合が大きくなることにより、剛性行列を組むのに要する時間が相当の割合を占めるからである。

一方、同じ理由から、前段階までの不平衡力ベクトル

$$R_e(t_n) = F(t_n) - M \cdot \ddot{X}_n - R(X_n) \dots\dots\dots (16)$$

の計算、特に、全増分段階、全節点について必ずしも必要でない  $R(X)$  の計算に要する時間が、全体に対して、同様に、相当の割合を占める場合が多い。ゆえに、線形化剛性行列として推定割線剛性行列が十分に正確であり、数値積分を行う際に慣性力を補完することによる過度の打ち切り誤差を生じない限界の時間間隔に対応する各増分段階で、反復収束計算による修正<sup>13)</sup>はもちろん、前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正<sup>11), 12)</sup>すらなしに過度の累積誤差を除去することを可能にするならば、多くの場合、計算時間を相当量短縮することができる。そして、その場合に、本計算手法は非常に合理的な手法であるといえることができる。

また、前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正を行うことにより、反復収束計算なしに非線形性のきわめて高い構造物の問題、あるいは、きわめて高い精度を要求される特殊な問題等にも有効な手法となるならば、この種の問題の合理的計算手法ということになる。

## (2) モード重畳法

各増分段階、たとえば、第  $(n+1)$  回目において、式

(3) を次式のように線形化し、モード重畳法を適用する。

$$\begin{aligned} M \cdot \Delta \ddot{X}_{n+1} + \tilde{K}(X_{st}, \mathbf{0}) \cdot \Delta X_{n+1} \\ = F(t_{n+1}) - F(t_n) - \Delta N^*(t_{n+1}) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta N^*(t_{n+1})$  は付加擬荷重ベクトルとよばれる<sup>15)</sup>、内部抵抗力ベクトル  $R(X)$  の非線形項に対応する一種の不平衡力ベクトル

$$N(t_{n+1}) = R(X_{n+1}) - \tilde{K}(X_{st}, \mathbf{0}) \cdot X_{n+1} \dots\dots (18)$$

の未知増分  $\Delta N(t_{n+1})$  を前段階までの計算結果 ( $\Delta N(t_n)$ ,  $\Delta N(t_{n+1}), \dots$ ) から外挿的に推定するものである。また、 $X_{st}$  は静的荷重載荷時の平衡状態での節点変位ベクトルであり、 $\tilde{K}(X_{st}, \mathbf{0})$  はその状態での接線剛性行列を表わしている。

推定増分  $\Delta N^*(t_{n+1})$  を外挿する計算式としては、前節と同様に、

$$\left. \begin{aligned} \Delta N^*(t_{n+1}) &= \Delta N(t_n) & (n=1) \\ \Delta N^*(t_{n+1}) &= 2\Delta N(t_n) - \Delta N(t_{n-1}) & (n=2) \\ \Delta N^*(t_{n+1}) &= 3\Delta N(t_n) - 3\Delta N(t_{n-1}) \\ &\quad + \Delta N(t_{n-2}) & (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

なる差分式を採用する。

式 (19) において  $\Delta N(t_n)$  の計算に相当の時間を要するが、本手法では、線形化剛性行列  $\tilde{K}(X_{st}, \mathbf{0})$  が各増分段階で一定であり、基礎式である式 (17) を算定するために要する計算時間は、前節で直接積分法を適用した式 (14) の場合と比較しても、ほとんど差がない。

ゆえに、式 (17) のように線形化された運動方程式の増分形が、対象とする構造物の非線形性の程度によって実用上十分な精度を満足するならば、モード重畳法を適用できることにより、記憶領域、および、計算時間が大幅に減少することから、本計算手法はきわめて合理的であるといえることができる。

## 5. 数値計算

前章で、幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答計算法として提案した、直接積分法、およびモード重畳法にそれぞれ対応する 2 種の手法の妥当性、合理性の検討、および、従来<sup>8)~18)</sup>の計算手法との対応を考え、以下に説明する各種の数値計算例を用いて、計算結果の比較、考察を行う。

### (1) 推定割線剛性行列と付加擬荷重の推定増分の評価

提案した両計算手法にそれぞれ用いられる、推定割線剛性行列、および、付加擬荷重の推定増分の妥当性をより厳密に明らかにするために、両者をそれぞれ用いる増分法による平面骨組構造物の静的解析を行う。そして、

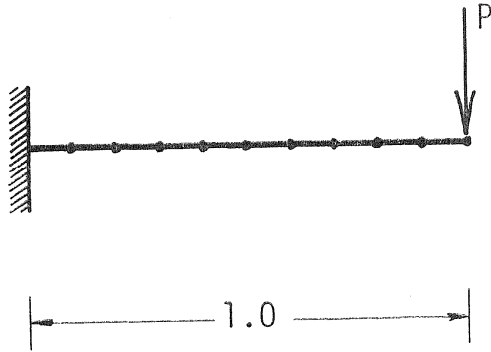


図-2 片持ばり

混合法による結果と比較、検討する。なお、参考のために、接線剛性行列を用いる増分法による計算、および、線形計算も同時に行う。

a) 計算例

図-2 のような片持ばりを 10 部材要素に等分し、各部材要素の断面積  $A$ 、断面二次モーメント  $I$ 、および、弾性係数  $E$  を次のような値とする。

$$A=0.0001, I=0.000001, E=2.1 \times 10^7$$

また、自由端に荷重される集中荷重  $P$  の値を最大 10.0 とし、この値を総増分段階数  $N$  で除して、各増分段階の荷重増分とする。そして、総段階数  $N$  は 10, 11, 12, および、13 の 4 種とする。

混合法において、Newton-Raphson 法による反復収束計算の許容誤差は、変位、および、応力に対して、ともに  $10^{-5}$  とする。

計算結果の一部を各計算手法について、表-1 に示す。

b) 考察

表-1 にその一部を示した計算結果から、まず、総段階数  $N=10$  の場合に、各増分段階での自由端鉛直変位の増分値を各計算手法について図示すると、図-3 のようになる。この図-3 において、混合法による値と他の各種増分法による値とを比較して、次のようなことが解る。すなわち、各増分段階での線形化剛性行列として、接線剛性行列と比較し、推定割線剛性行列は、はるかに正確であり、他方、付加擬荷重の推定増分を用いて線形化する考え方も非常に有効であることが明らかである。

表-1 最終増分段階での自由端鉛直変位の計算値

Total No. of Division : $N$	Linear Anal.	Mixed Method	Incremental Method		
			Estim. Chordal Stif.	Tangent. Stif.	Add. Pseudo-loads
10	0.15873	0.15493	0.15431	0.15101	0.15504
11			0.15456	0.15137	0.15500
12			0.15475	0.15168	0.15497
13			0.15490	0.15194	0.15496

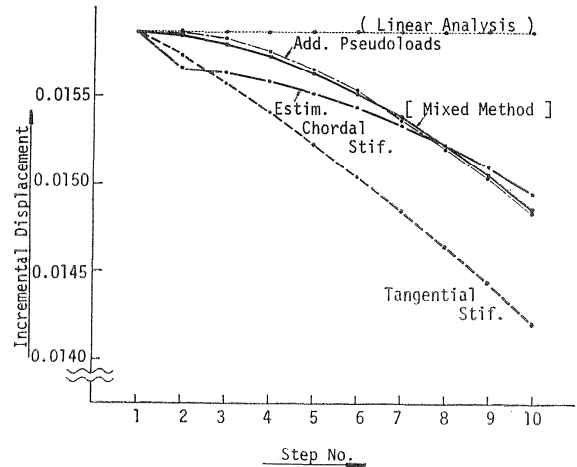


図-3 各増分段階での自由端鉛直変位の増分値 ( $N=10$ )

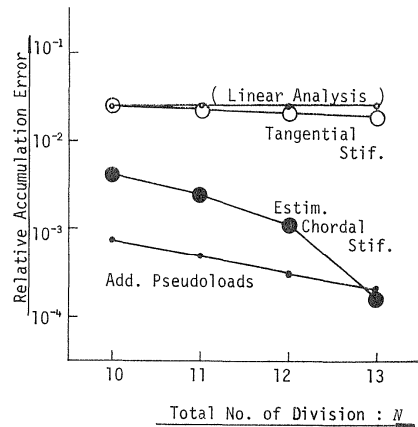


図-4 最終増分段階での自由端鉛直変位の相対累積誤差

る。

次に、最終増分段階での自由端鉛直変位の各種増分法による値の混合法による値に対する相対累積誤差を各総段階数について図示すると、図-4 のようになる。この図-4 からは、推定割線剛性行列、および、付加擬荷重の推定増分をそれぞれ用いる増分法が、総段階数の増加による各増分段階での割線剛性行列の非線形性の低下につれ、きわめて高い精度を有するようになることが解る。

したがって、各増分段階における割線剛性行列の非線形性が、本節の計算例程度の場合には、推定割線剛性行列、および、付加擬荷重の推定増分を用いることは十分に妥当であると思われる。

ゆえに、動的応答解析のように、数値積分に伴う打ち切り誤差による制約から非常に多くの増分段階を必要とする反面、各増分段階における割線剛性行列の非線形性がかなり低下していることが予測されるような場

合に、両者が妥当性を有することは、十分に可能であると思われる。

## (2) 動的応答解析例

提案した両計算手法の妥当性を調べるために、両者を含め、6種の計算手法が、2種の走行荷重による平面骨組構造物の動的応答解析例の計算手法として用いられる。そして、各計算手法による計算結果を、比較、検討する。

ここに、6種の計算手法の内、直接積分法に対応するものは、推定割線剛性行列を用いる手法(CSM)のほか、接線剛性行列を用いる手法(TSM)、CSMに対し前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正を行う手法(CSM\*)、および、反復収束計算による修正を行う手法("EXACT")の4種である。

そして、他方、モード重畳法に対応するものとして、付加擬荷重の推定増分を用いる手法(APM)のほか、参考のために、APMにおいて付加擬荷重の推定増分の項を無視する手法、すなわち、線形問題に対応する手法(LSM)が用いられる。

### a) 2ヒンジ放物線アーチ (計算例-1)

図-5に示すような径間長200mの2ヒンジ放物線アーチを20部材要素に分割し、各部材要素の断面積 $A$ 、断面二次モーメント $I$ 、および、弾性係数 $E$ を次のような値とする。

$$A=0.5 \text{ m}^2, I=0.5 \text{ m}^4,$$

$$E=2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

また、自重に対応する静的等分布荷重、および、載荷長400mの等速走行等分布荷重の強度は、それぞれ、12.5 t/m、および、5.0 t/mとする。そして、この走行荷重の速度 $V$ は100 km/h、120 km/h、140 km/h、および、160 km/hの4種とする。

数値積分法<sup>21)</sup>としては、Newmarkの $\beta$ 法<sup>22)~26)</sup>を採用し、 $\beta=$

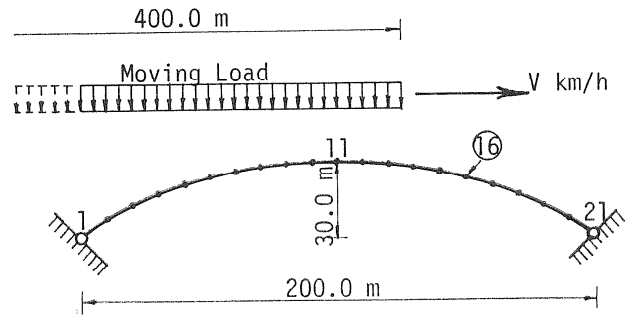


図-5 2ヒンジ放物線アーチ

表-2 第16節点の最大鉛直変位の計算値 ( $\Delta t=0.06 \text{ sec}$ )

Speed : $V$ (km/h)	"STATIC"	Direct Integration Method				Mode Superposition Meth.	
		"EXACT"	CSM*	CSM	TSM	APM	LSM
100	0.474	0.656	0.656	0.656	0.632	0.650	0.506
120		0.741	0.741	0.740	0.716	0.644	0.616
140		0.548	0.548	0.543	0.427	0.515	0.626
160		1.188	1.187	1.179	0.960	0.997	0.792

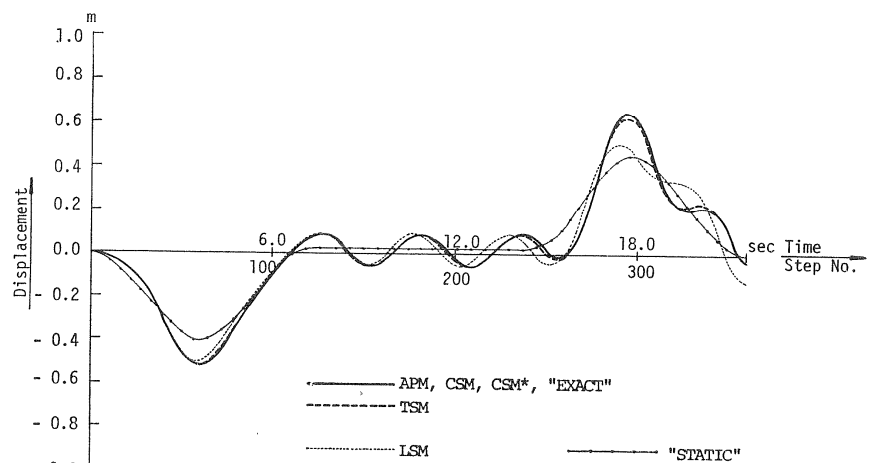


図-6 第16節点の鉛直変位の時間曲線 ( $V=100 \text{ km/h}$ ,  $\Delta t=0.06 \text{ sec}$ )

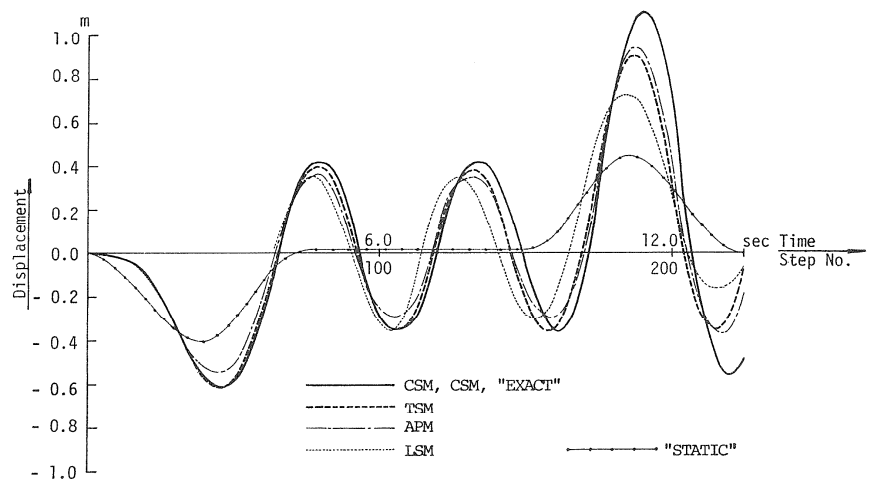


図-7 第16節点の鉛直変位の時間曲線 ( $V=160 \text{ km/h}$ ,  $\Delta t=0.06 \text{ sec}$ )

0.25 とする。そして、各増分段階に対応する時間間隔  $\Delta t$  は許容打ち切り誤差が 1.0% の範囲内で、0.03 sec, 0.04 sec, 0.05 sec, および、0.06 sec の 4 種とする。また、多次元帯対称行列で表現される固有値問題の解法<sup>21)</sup>としては、Sturm Sequence 法<sup>27)~29)</sup>を用いる。

なお、“EXACT”において、Newton-Raphson 法による反復収束計算の許容誤差は、変位、および、応力に対して、ともに  $10^{-4}$  とする。

計算結果の一部を、各計算手法について、表-2、および、図-6, 7 に示す。ただし、これらの表、および、図中の“STATIC”の記号は、静的計算による値を意味している。

b) 大径間斜張橋 (計算例-2)

大型構造物の例として、図-8 に示すような中央径間長 700 m の 3 径間対称斜張橋の解析を行う。総節点数、および、総部材数は、それぞれ、115、および、154 であり、各部材の断面積  $A$ 、断面二次モーメント  $I$ 、および、弾性係数  $E$  を次のような値とする。

$$A_g = 1.0 \text{ m}^2, I_g = 5.0 \text{ m}^4, E_g = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$A_t = 0.7 \text{ m}^2, I_t = 1.0 \text{ m}^4, E_t = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$A_c = 0.04, 0.05 \text{ m}^2, I_c = 0.0 \text{ m}^4, E_c = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

ここに、添字  $g, t, c$  は、それぞれ、主桁、主塔、および、ケーブルの値を意味している。

また、自重に対応する前死荷重、主桁に載荷される等分布後死荷重、および、載荷長 400 m、走行速度  $V = 160 \text{ km/h}$  の等速走行等分布荷重の強度は、それぞれ、 $7.85 \text{ t/m}^3, 4.55 \text{ t/m}$ 、および、 $3.80 \text{ t/m}$  とする。

数値計算法は計算例-1 の場合と同じものを用いるが、各増分段階に対応する数値積分の時間間隔は、許容

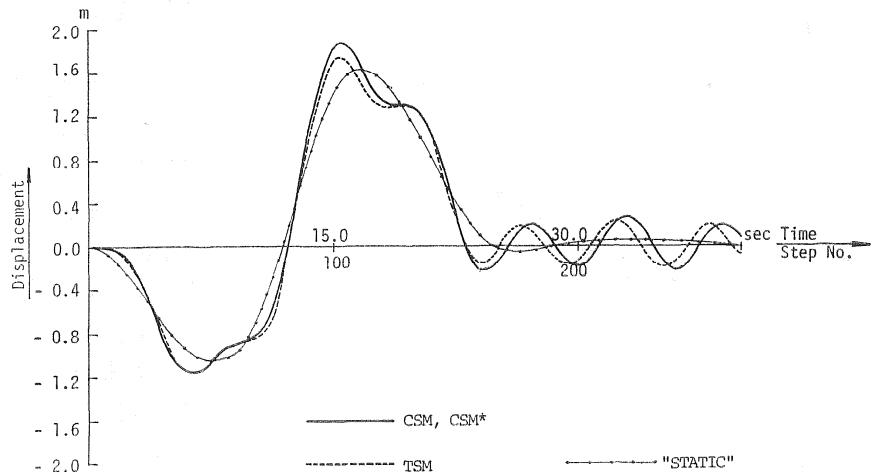


図-9 第 36 節点の鉛直変位の時間曲線

表-3 各節点の鉛直変位、曲げモーメント、および、軸力の最大値

Kind of Value	Node No.	"STATIC"	Calculation Method		
			CSM*	CSM	TSM
Vertical Displacement [ m ]	10	1.322	1.463	1.462	1.456
	36	1.636	1.894	1.885	1.777
Bending Moment [ $\times 10^4 \text{ tm}$ ]	6	1.624	1.821	1.816	1.810
	38	0.847	1.148	1.149	1.117
	96	1.550	1.951	1.944	1.732
Axial Force [ $\times 10^3 \text{ t}$ ]	114	0.809	0.868	0.863	0.861

打ち切り誤差を最大 1.0% として、 $\Delta t = 0.15 \text{ sec}$  とする。

計算結果の一部を各計算手法について、表-3 および、図-9 に示す。なお、表-3 に含まれる曲げモーメント値、および、軸力値は CSM, TSM の場合には、着目点についてのみ、しかも、2 増分段階ごとに計算したものである。着目点は、静的解析の結果を参考にして選んでいる。

また、表-3、および、図-9 における“STATIC”の記号は計算例-1 の場合と同様に、静的計算による値を意味している。

c) 考 察

計算例-1 において、表-2、および、図-6, 7 にその一部を示した計算結果から、第 16 節点の最大鉛直変位の各計算手法による計算値について、“EXACT”による値に対する相対累積誤差を、時間間隔  $\Delta t = 0.06 \text{ sec}$  の場合に各走行速度に対応して図示すると、図-10 のようになる。また、同様の相対累積誤差を走行速度  $V = 160 \text{ km/h}$  の場合に各時間間隔に対応して図示すると、図-11 のようになる。

まず、直接積分法に対応する手法について、これらの図-10, 11 から解るように、CSM、および、CSM\* は、

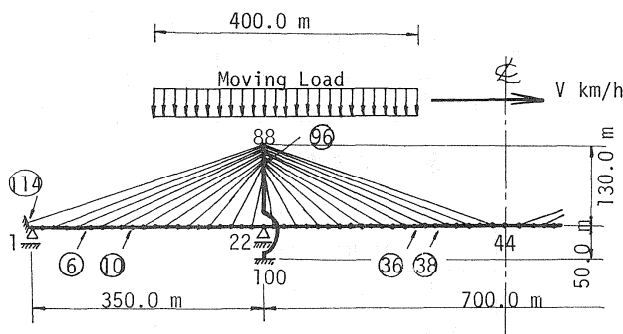
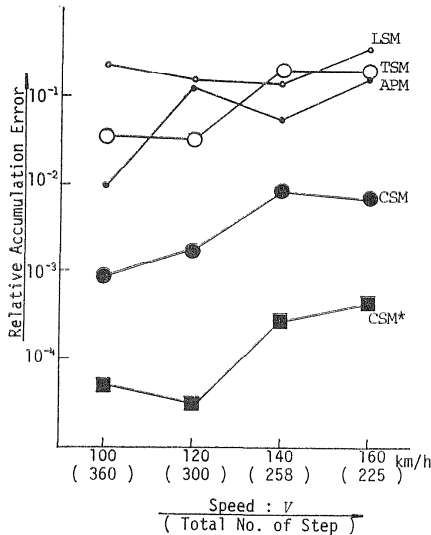
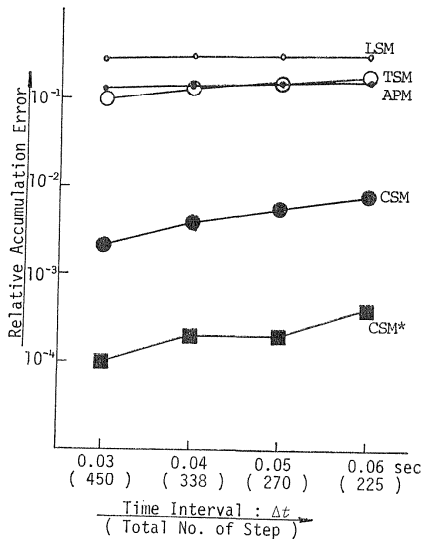


図-8 大径間斜張橋



図一〇 第16節点の最大鉛直変位の相対累積誤差 ( $\Delta t=0.06$  sec)



図一〇 第16節点の最大鉛直変位の相対累積誤差 ( $V=160$  km/h)

数値積分に伴う打ち切り誤差が1.0%を越えない限界の時間間隔  $\Delta t=0.06$  sec で、非線形性の相当高いと思われる走行速度  $V=160$  km/h の場合にも、過度の相対累積誤差を生ずることなく、TSM を含む他の計算手法と比較して、はるかに高い精度、そして、当然、設計計算上十分な精度を満足している。特に、CSM\* については、きわめて高い精度を有していることに注目すべきである。そして、これらの性状は、計算例-2 の計算結果の一部である表-3、および、図-9 から推測できる。

ゆえに、線形化剛性行列として推定割線剛性行列を用いれば、数値積分に伴う過度の打ち切り誤差を生じない限界の時間間隔に対応する各増分段階で、反復収束計算による修正はもちろん、前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正すらなしに、過度の累積誤差を除去し、設計計算上十分な精度を有することが可能で

あると思われる。なお、節点変位の計算値のみならず、応力値も必要とする場合には、全増分段階、全節点についてではなく、静的解析などから選ばれる数個の着目点についてのみ、しかも、数段階ごとに計算すれば、設計計算上十分である。

また、本計算手法に対し、各増分段階で前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正を行うことによって、反復収束計算なしに非線形性のきわめて高い構造物の問題、あるいは、きわめて高い精度を要求される特殊な問題などにも有効な手法となることが十分に予想される。

他方、モード重畳法に対応する手法について、同様に、相対累積誤差に関する図-10 から、APM は最大鉛直変位の減少、および、総増分段階数の増加により、各増分段階での割線剛性行列の非線形性がかなり低下していると思われる走行速度  $V=100$  km/h、および、 $V=140$  km/h の場合に、他の場合と比較して高い精度を有することが解る。そして、割線剛性行列の非線形性が最も低いと思われる  $V=100$  km/h の場合には、APM は、設計計算上十分な精度を満足している。しかしながら、これに対し、LSM はきわめて不安定な結果を示している。

したがって、付加擬荷重の推定増分を用いる計算手法は、対象とする構造物の非線形性の程度、および、総増分段階数により、各増分段階での割線剛性行列の非線形性が低い場合には、設計計算上十分な精度を有するものと思われる。

(3) 計算手法の合理性の検討

提案した両計算手法の合理性を明らかにするために、筆者らが開発した動的応答解析計算プログラムを用いる場合の各計算手法の必要計算時間を比較、検討する。

まず、参考のために、前節の動的応答解析例における2種の計算例について、各計算手法の必要計算時間を

表-4 計算時間 (計算例-1.  $V=100$  km/h,  $\Delta t=0.06$  sec)

Direct Integ. Meth.				Mode Sup. Meth.	
"EXACT"	CSM*	CSM	TSM	APM	LSM
270	98	79	75	42	20

表-5 計算時間 (計算例-2)

Calculation Method		
CSM*	CSM	TSM
839	741	719

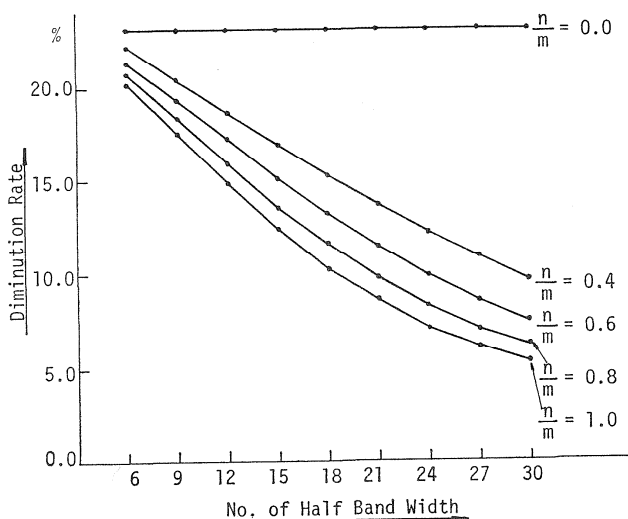


表—4,5 に示す. なお, 計算には, NEAC-2200-700 (大阪大学大型計算機センター) を用いている.

直接積分法に対応する手法について, これらの表—4,5 から解るように, CSM と TSM の必要計算時間には, ほとんど差がない. すなわち, 推定割線剛性行列を組むのに要する計算時間は, 接線剛性行列の場合とほとんど変わらないといえる. そして, CSM は各増分段階において前段階までの不平衡力を仮想外力として付加するという修正を必要としないことにより, CSM\* の必要計算時間に対し, 両計算例について, それぞれ, 約 20%, および, 約 12%, 必要計算時間が減少している. ただし, 両計算例の対称剛性行列の半帯幅数は, それぞれ, 6, および, 18 であった. また, 表—4 から, CSM\* に対する “EXACT” の必要計算時間の倍率は約 3 倍であることが解るが, 当然, 反復収束計算の反復回数の平均値にほぼ比例している.

ゆえに, 推定割線剛性行列を用いる直接積分法は, 不平衡力を計算しないことにより, 計算時間の相当量の減少を可能とするといってもよいと思われる. そして, この必要計算時間の減少率は, 近似的にはあるが, 総節点数  $n$  と総部材数  $m$  の比率  $n/m$ , および, 対称剛性行列の半帯幅数とにより, 一般的に, 図—12 のように図示することができる. すなわち, この 図—12 から, 半帯幅数が少ないほど, および, 比率  $n/m$  が小さいほど, 減少率が大きな値となり, 本計算手法の合理性が増すことが解る. なお, 応力値も必要とする場合に, 数個の着目点についてのみ, しかも, 数段階ごとに計算するために要する時間は微々たるものであり, 合理性の問題とはほとんど無関係である.

また, 本計算手法に対し, 不平衡力を仮想外力として付加するという修正を行う手法は, 反復収束計算を必要としないことにより, 非線形性のきわめて高い構造物の問題, あるいは, きわめて高い精度を要求される特殊な



図—12 計算時間の減少率

問題などの計算手法として, 合理的な手法であると思われる.

他方, モード重畳法に対応する手法について, 同様に, 必要計算時間に関する表—4 から, APM の必要計算時間が, 直接積分法に対応する各計算手法に比較して, 大幅に低減することが解る.

したがって, 付加擬荷重の推定増分を用いる計算手法は, モード重畳法を適用できることにより必要計算時間が大幅に低減し, しかも, 記憶領域も大幅に減少することから, 非線形性の高くない構造物の問題などの計算手法として, きわめて合理的な手法であるといってもよいと思われる.

## 6. 結 言

本文は, 有限要素法による幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答解析に用いられる新たな合理的計算手法を, 直接積分法, および, モード重畳法にそれぞれ対応して, 2 種提案したものである.

各種の数値計算例を用いて, 計算結果の比較, 考察を行い, 提案した両計算手法の妥当性, 合理性の検討を行った結果からは次のようなことがいえる.

(1) 推定割線剛性行列を用いる直接積分法は, 従来の接線剛性行列を用いる手法に比較して, はるかに高い精度を有し, 計算時間の相当量の減少を可能とする.

(2) 付加擬荷重の推定増分を用いるモード重畳法は非線形性の程度によっては, 実用上十分な精度を満足し, 記憶領域, および, 計算時間を大幅に低減させる.

なお, 本文では, 減衰力に関する項を省略したが, 提案した両計算手法に, この項を容易に導入できることはいうまでもない. さらに, 両計算手法の基礎的アルゴリズムは, 幾何学的非線形性のみならず, 材料非線形性をも考慮した三次元問題を含む一般構造物の動的応答解析のための計算手法にも容易に拡張され得るものであると思われる.

また, 本文は, 提案した両計算手法の妥当性, および, 合理性の検討に重点を置いたものであるが, 両手法による各種形式平面骨組構造物の動的応答解析の結果を次回, 詳細に報告する予定である.

## 参 考 文 献

- 1) Livesley R.K.: Matrix Method of Structural Analysis, Pergamon Press, 1969, pp. 176~198.
- 2) 大地羊三: 構造解析とコンピュータ, 産業図書, 1971, pp. 239~269.
- 3) Desai C.S. and J.F. Abel: Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972, pp. 243~276.
- 4) 土木学会編: 土木工学における数値解析・変形応力解析編, サイエンス社, 1974, pp. 71~129.

- 5) 川股・大山・半谷・田中：幾何学的非線形問題における荷重漸増法の問題点，日本鋼構造協会第7回マトリクス構造解析法研究発表論文集，1971.
- 6) 前田・林・中村：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223, 1974.
- 7) Kao R. : A Comparison of Newton-Raphson Methods and Incremental Procedures for Geometrically Non-linear Analysis, *Computer & Structures*, Vol. 4, 1974.
- 8) 山田嘉昭：マトリクス法の応用，東京大学出版会，1972, pp. 207~235.
- 9) 河島佑男：動的応答解析（コンピュータによる構造工学講座 II-4），培風館，1972, pp. 33~80.
- 10) Clough R.W. : Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, *Jap.-U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design*, Tokyo, 1969.
- 11) Clough R.W. and K.J. Bathe : Finite Element Analysis of Dynamic Response, *U.S.-Jap. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design*, Berkeley, 1972.
- 12) Wilson E.L., I. Farhoomand and K.J. Bathe : Non-linear Dynamic Analysis of Complex Structures, *Earthq. Engin. and Structural Dynamics*, Vol. 1, 1973.
- 13) Bathe K.J., E. Ramm and E.L. Wilson : Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, Vol. 9, 1975.
- 14) Argyris J.H., P.C. Dunne and T. Angelopoulos : Non-Linear Oscillations Using the Finite Element Technique, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, Vol. 2, 1973.
- 15) Stricklin J.A., J.E. Martinez, J.R. Tillerson, J.H. Hong and W.E. Haisler : Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method, *AIAA J.*, Vol. 9, No. 4, 1971.
- 16) 伊藤哲治：モーダル・アナリシスの弾塑性応答解析への応用，日本鋼構造協会第7回マトリクス構造解析法研究発表論文集，1973.
- 17) 中尾・高野：骨組構造物の弾塑性地震応答解析，日本鋼構造協会第7回マトリクス構造解析法研究発表論文集，1973.
- 18) Nakao Y. and S. Takano : Elasto-Plastic Seismic Response Analysis of Framed Structures by Mode Superposition, *Proc. of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Method*, 1973.
- 19) 前田・林・前田：骨組構造物の非線形振動解析に関する二，三の考察，第29回土木学会年次学術講演会講演概要集，1974.
- 20) 前田・林・前田：有限要素法による平面骨組構造物の非線形振動解析に関する二，三の考察，第24回応用力学連合講演会講演論文抄録集，1974.
- 21) たとえば，磯田・大野：Fortranによる数値計算ハンドブック，オーム社，1971, pp. 3~122, pp. 165~260.
- 22) Newmark N.M. : A Method of Computation for Structural Dynamics, *Proc. of ASCE*, EM 3, 1959.
- 23) 山本・山田：マトリクス構造解析の誤差論（コンピュータによる構造工学講座 II-5），培風館，1972, pp. 149~168.
- 24) Goudreau G.L. and R.L. Taylor : Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, Vol. 2, 1972.
- 25) Nickel R.E. : Direct Integration Methods in Structural Dynamics, *Proc. of ASCE*, EM 2, 1973.
- 26) Bathe K.J. and E.L. Wilson : Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, *Earthq. Engin. and Structural Dynamics*, Vol. 1, 1973.
- 27) Gupta K.K. : Solution of Eigenvalue Problems by Sturm Sequence Method, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, Vol. 4, 1972.
- 28) Gupta K.K. : Eigenproblem Solution by a Combined Sturm Sequence and Inverse Iteration Technique, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, Vol. 7, 1973.
- 29) Gupta K.K. : Recent Advances in Numerical Analysis of Structural Eigenvalue Problems, *Proc. of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Method*, 1973.

(1975.9.18・受付)