

## 【ノート】

## サグを考慮したケーブル部材の計算式

## ANALYTICAL CALCULATION OF SAGGING CABLE

前田 幸雄\*・林 正\*\*・前田 研一\*\*\*

By Yukio MAEDA, Masa HAYASHI and Ken-ichi MAEDA

## 1. ま え が き

本文は、サグの影響を考慮したケーブル部材の非線形解析に用いる計算式について、述べたものである。このようなケーブル部材の解析は、ケーブルをリンク構造に置き換えることによって、比較的簡単に行うことができる。この計算手法によれば、ケーブルの分割数を多くすることにより、サグの影響をかなり正確に表わすことができる。しかし、マトリックス解法を用いた場合には、未知数の単なる増加のみならず、剛性行列の帯幅数が大きくなるために、計算時間が飛躍的に増大し、かつ、大きな記憶容量も必要なことから、数多くのケーブル部材を有する構造物の解析においては、合理的な手法ではない。

一方、斜張橋の設計計算においては、修正弾性係数を用いてサグの影響を考慮した手法がよく用いられている。たとえば、Lazar<sup>2)</sup> や Tang<sup>3)</sup> は Ernst の修正弾性係数<sup>1)</sup>を用いて、斜張橋の非線形解析を行っている。しかし、Ernst の修正弾性係数は接線剛性を表わすので、反復計算においてサグの影響をより厳密に考慮した非線形方程式を用いずに、この修正弾性係数を用いてケーブル張力や不平衡力を求めるこれらの計算法は、非線形問題の数値解法として論理的に間違っており、妥当な解法とはいえない注)。

すなわち、逐次近似法により非線形方程式を解くためには、近似解を原方程式に代入して厳密な残差を求めなければ、逐次近似解は厳密解に収束しないことはいうまでもないことである。上記の文献で用いられている解法では、もとの非線形方程式を線形近似した弾性方程式から残差(不平衡力)を求めることになり、反復計算で近

似解を改良しても線形化による誤差は修正されないからである。したがって、反復法により解の精度を上げるためには、線形化を行わない原方程式(ケーブル方程式)を用いなければならない。いうまでもなく、この修正弾性係数を用いて、ケーブルの剛性に及ぼすサグの概略的な影響を調べることは、非線形解析とは別な問題である。

Livesley は、サグの影響を考慮したケーブル方程式の近似式と接線剛性を導き、支線つきマストの解析<sup>4),5)</sup>を行っているが、式の誘導においてかなりの簡略化が行われているために、変形の大きい場合には解の収束性はあまりよくない。

そこで本文では、まず Ernst の修正弾性係数の力学的な意味を明らかにし、この係数が接線剛性を表わしていることを指摘する。そして、サグの影響を考慮したケーブル部材の計算式をマトリックス法による平面骨組構造物の大変形解析の計算手法<sup>6)</sup>に組み入れるために、ケーブル方程式と接線剛性行列を誘導する。この解析法はすでに発表したもの<sup>7),8)</sup>であるが、別な方法より計算式を導くとともに、さらに計算に便利な形の式を示す。

## 2. Ernst の修正弾性係数

Ernst の修正弾性係数  $E_i$  は次式で定義される<sup>1)</sup>。

$$E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_e + \epsilon_f} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\epsilon_e$ ,  $\epsilon_f$  はそれぞれ、ケーブルの軸応力  $\sigma$  による弾性ひずみと形状変化による見かけのひずみである。すなわち、弾性変形に対応する弾性係数を  $E_e$ 、形状変化に対応する見かけの弾性係数を  $E_f$  とすると、

$$E_e = \frac{\sigma}{\epsilon_e}, E_f = \frac{\sigma}{\epsilon_f} \dots\dots\dots (2)$$

である。したがって、式(2)を式(1)に代入すると、

$$E_i = \frac{E_e}{1 + E_e/E_f} \dots\dots\dots (3)$$

となる。

Ernst は見かけの弾性係数  $E_f$  を図-1 に示すようなケーブルのモデルを考えて、次のような式で与えている。

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 大阪大学講師 工学部土木工学科

\*\*\* 学生会員 工修 大阪大学大学院工学研究科博士課程土木工学専攻(現・川田工業(株)技術本部研究室)

注) 線形化による誤差が無視できる構造物では、これらの解法を用いても数値的にはかなり精度の良い解を求めることができると思われる。

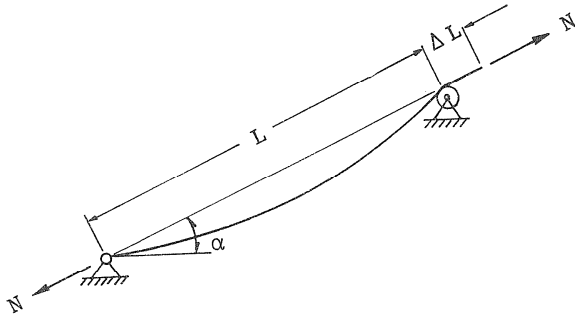


図-1 ケーブルのモデル

$$E_f = \frac{L}{A} \frac{dN}{d\Delta L} = \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta N}{A} \right) / \left( \frac{\Delta \Delta L}{L} \right) \dots (4)$$

ここに、 $A$  はケーブルの断面積、 $\Delta \Delta L$  は軸力  $N$  が  $N + \Delta N$  に変化する際のケーブル右端点の軸方向移動量  $\Delta L$  の変化量である。上式は

$$\frac{\Delta N}{A} = \Delta \sigma, \quad \frac{\Delta \Delta L}{L} = \Delta \epsilon_f \dots (5)$$

の関係より、次式のように変形できる。

$$E_f = \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon_f} = \frac{d\sigma}{d\epsilon_f} \dots (6)$$

すなわち、式 (4) の  $E_f$  は軸ひずみ  $\epsilon_f$  による軸応力度  $\sigma$  の微係数を表わしており、式 (3) に式 (4) を代入して具体的に与えられた Ernst の修正弾性係数

$$E_i = \frac{E_e}{1 + \frac{(rL)^2 \cos^2 \alpha}{12 \sigma^3} E_e} \dots (7)$$

は、いわゆる接線剛性に対応するものである。ここに、 $r$  はケーブルの単位重量である。

一方、Livesley は、簡略化計算からではあるが、ケーブル部材の接線剛性  $\Delta k$  として、次式を与えている<sup>4)</sup>。

$$\Delta k = \frac{E_e A}{L} \cdot \frac{N^3}{N^3 + E_e A W^2 / 12} \dots (8)$$

ここに、 $W$  はケーブルに作用する全荷重である。

したがって、ケーブルのサグによる剛性の変化を考慮した場合の弾性係数を  $E'$  とし、

$$\Delta k = \frac{E' A}{L}, \quad N = \sigma A, \quad W = rAL \cos \alpha \dots (9)$$

とおき、式 (9) を式 (8) に代入すれば、 $E'$  は式 (7) の  $E_i$  と同一なものになることがわかる。

ゆえに、以上のことから、Ernst の修正弾性係数は接線剛性と評価されるものである。したがって、この修正弾性係数を非線形解析に適用する場合、接線剛性行列に用いることは可能であるが、部材張力の計算やこの張力による不平衡力の計算に用いることは明らかに間違いであり、このことは Livesley も指摘していることである<sup>4)</sup>。また、式 (8) の接線剛性を用いて、非線形解析を行うとき、Newton-Raphson 法が発散しやすいことも示されている<sup>5)</sup>。

### 3. ケーブル部材の計算式

#### (1) ケーブル方程式

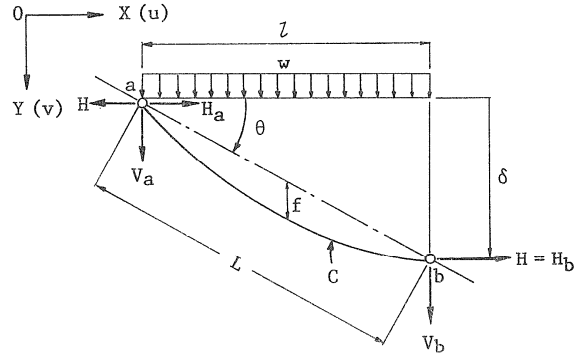


図-2 放物線ケーブル

図-2 に示すような、等分布荷重  $w$  が载荷される非対称の放物線ケーブル  $ab$  を考えると、次のような基本式が与えられる。

ケーブル張力の水平成分： $H$

$$H = \frac{wl^2}{8f} = \frac{W}{8n} \dots (10)$$

水平、鉛直部材端力： $H_a, H_b, V_a, V_b$

$$\left. \begin{aligned} H_a &= -H, \quad H_b = H \\ V_a &= -\frac{wl}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{4f} \right) = -\frac{W}{2} \left( 1 + \frac{m}{4n} \right) \\ V_b &= -\frac{wl}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{4f} \right) = -\frac{W}{2} \left( 1 - \frac{m}{4n} \right) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ケーブルの張力による伸び： $\Delta C$

$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{Hl}{EA} \left( 1 + \frac{16f^2}{3l^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \right) \\ &= \frac{Wl}{8nEA} \left( 1 + \frac{16}{3}n^2 + m^2 \right) \dots (12) \end{aligned}$$

ケーブル長： $C$

$$\begin{aligned} C &= \frac{l}{16n} \left[ (4n+m) \sqrt{1+(4n+m)^2} \right. \\ &\quad \left. + (4n-m) \sqrt{1+(4n-m)^2} \right. \\ &\quad \left. + \log_e \{ (\sqrt{1+(4n+m)^2} + 4n+m) \right. \\ &\quad \left. \times (\sqrt{1+(4n-m)^2} + 4n-m) \} \right] \dots (13) \end{aligned}$$

ここに、 $n$  はサグ比、 $m$  はケーブルの傾き、 $EA$  は伸び剛性、 $W$  はケーブルに作用する荷重の総量を表わす。

$$n = f/l, \quad m = \delta/l, \quad W = wl = \text{const.} \dots (14)$$

上式に含まれる記号のうち、 $m$  と  $\delta$  以外は、常に正の量である。

無応力長  $C_0$  のケーブルに鉛直等分布荷重が作用したとき、変形後のケーブルについて、次式が成立する。

$$C - \Delta C - C_0 = 0 \dots\dots\dots(15)$$

上式に、式 (12), (13) を代入し、さらに、 $n$  を乗じたものを  $\phi(n)$  とおく。すなわち、

$$\begin{aligned} \phi(n) = & \frac{l}{16} [(4n+m)\sqrt{1+(4n+m)^2} \\ & + (4n-m)\sqrt{1+(4n-m)^2} \\ & + \log_e \{ (\sqrt{1+(4n+m)^2} + 4n+m) \\ & \times (\sqrt{1+(4n-m)^2} + 4n-m) \}] \\ & - \frac{Wl}{8EA} \left( 1 + \frac{16}{3}n^2 + m^2 \right) - nC_0 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

したがって、 $l$  と  $\delta$  の値がわかれば、サグ比  $n$  は上式から求められ、式 (11) より、材端力  $H_a, H_b, V_a$ , および、 $V_b$  が与えられる。上式をケーブル方程式とよぶ。

この  $n$  に関する超越方程式を解くために、 $\phi(n)$  の導関数を求めておく。

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dn} = & \frac{l}{2} \{ \sqrt{1+(4n+m)^2} + \sqrt{1+(4n-m)^2} \} \\ & - \frac{4Wl}{3EA}n - C_0 \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

(2) 接線剛性行列

ケーブルの長さを与える式 (13) は、十分な精度で次の近似式に置き換えることができる。

$$C = l \left| \sec \theta + \frac{8n^2}{3 \sec^3 \theta} \right| = l \sqrt{1+m^2} + \frac{8l}{3(1+m^2)^{3/2}}n^2 \dots\dots\dots(18)$$

式 (15) において、式 (13) の代わりに、この近似式を用いると、ケーブル方程式の近似式として、次式が得られる。

$$\begin{aligned} l \sqrt{1+m^2} + \frac{8l}{3(1+m^2)^{3/2}}n^2 \\ - \frac{Wl}{8nEA} \left( 1 + m^2 + \frac{16}{3}n^2 \right) - C_0 = 0 \dots\dots(19) \end{aligned}$$

上式において、 $n, l, \delta$  の増分の関係を求めると、次式を導くことができる。

$$\begin{aligned} \Delta n = & -\frac{8n^2}{W} k \left[ \left\{ \frac{C_0}{L} + \left( 1 - 2\frac{C_0}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \right. \right. \\ & - \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 n + \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^4 \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 n^2 \left. \right\} \Delta l \\ & - \left\{ \left( 1 - 2\frac{C_0}{L} \right) \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right) - \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right)^2 \left( \frac{\delta}{L} \right) n \right. \\ & \left. \left. + \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^5 \left( \frac{\delta}{L} \right) n^2 \right\} \Delta \delta \right] \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} k = & \frac{EA}{L} \left\{ 1 - \frac{16}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^2 n^2 + \frac{128}{3} \frac{EA}{W} \left( \frac{l}{L} \right)^5 n^3 \right\} \\ L = & \sqrt{l^2 + \delta^2} \end{aligned} \dots\dots\dots(21)$$

一方、材端力の増分は式 (10), (11) より、

$$\begin{aligned} -\Delta H_a = \Delta H_b = \Delta H \cdot \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} = -\frac{W}{8n^2} \Delta n \cdot \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \\ -\Delta V_a = \Delta V_b = -\frac{W}{8n^2} \cdot \left( m \Delta n + \frac{mn}{l} \Delta l - \frac{n}{l} \Delta \delta \right) \end{aligned} \dots\dots\dots(22)$$

と表わされる。式 (20) を代入すれば、 $\Delta H, \Delta V$  は次のような式で  $\Delta l$ , および、 $\Delta \delta$  との関係式が与えられることになる。

$$\begin{aligned} \Delta H = & k \left\{ \frac{C_0}{L} + \left( 1 - 2\frac{C_0}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 n + \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^4 \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 n^2 \right\} \Delta l \\ & + k \left\{ \left( 2\frac{C_0}{L} - 1 \right) \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right) + \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right)^2 \left( \frac{\delta}{L} \right) n \right. \\ & \left. - \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^5 \left( \frac{\delta}{L} \right) n^2 \right\} \Delta \delta \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V = & k \left\{ \left( 2\frac{C_0}{L} - 1 \right) \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{\delta}{L} \right) + \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right)^2 \left( \frac{\delta}{L} \right) n \right. \\ & \left. + \frac{16}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^3 \left( \frac{\delta}{L} \right) n^2 - \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^5 \left( \frac{\delta}{L} \right) n^2 \right\} \Delta l \\ & + k \left\{ \frac{C_0}{L} + \left( 1 - 2\frac{C_0}{L} \right) \left( \frac{l}{L} \right)^2 - \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right)^3 n \right. \\ & \left. - \frac{16}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^4 n^2 + \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^6 n^2 \right\} \Delta \delta \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

また、節点変位の増分に関して、

$$\begin{aligned} \Delta l = & (\Delta u_b - \Delta u_a) (\cos \theta / |\cos \theta|) \\ \Delta \delta = & \Delta v_b - \Delta v_a \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

なる関係式を用いれば、材端力の増分  $\Delta F$  と節点変位の増分  $\Delta D$  に関する式を導くことができる。

すなわち、 $\Delta K$  を接線剛性行列、 $T$  を座標変換行列として、

$$\Delta F = T \cdot \Delta K \cdot T^t \cdot \Delta D \dots\dots\dots(26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta F = & \{ \Delta H_a, \Delta V_a, \Delta H_b, \Delta V_b \}^t \\ \Delta D = & \{ \Delta u_a, \Delta v_a, \Delta u_b, \Delta v_b \}^t \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned} T = & \begin{bmatrix} T' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T'' \end{bmatrix}, \quad T' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \Delta K = & \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad k = k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\ k = & \frac{EA}{L} \left\{ 1 - \frac{16}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^2 n^2 \right. \\ & \left. + \frac{128EA}{3W} \left( \frac{l}{L} \right)^5 n^3 \right\} \\ a = & \frac{C_0}{L}, \quad b = \left( 1 - \frac{C_0}{L} \right) - \frac{4W}{3EA} \left( \frac{l}{L} \right) n \\ & + \frac{40}{3} \left( \frac{l}{L} \right)^4 n^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(28)$$

ただし、式 (26) においては、 $\Delta V$  に関する式 (24) の右辺の下線を施した項を省略している。

#### 4. あとがき

本文は、サグの影響を考慮したケーブル部材の非線形解析を行う場合、Ernst の修正弾性係数の適用限界を指摘し、過去の文献で示された式より厳密な式を与えた。これらの計算式は、放物線ケーブルの仮定が成立する限り、変形の大きい場合にも実用上十分な精度を有していると考えられる。

本文における議論および、ここでは省略したが、すでに発表した種々の計算例の結果<sup>7),8)</sup>から、多数のケーブル部材を有する構造物の非線形解析には、本文で示した計算式は数値解析上種々の利点があり、合理的な解法であると思われる。

#### 参考文献

- 1) Ernst, H.J. : Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges, Bauingenieur, Heft 2, 1965.
- 2) Lazar, B.E. : Stiffness Analysis of Cable-Stayed Bridges, Proc. of ASCE, ST 7, 1972.
- 3) Tang, M.C. : Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges, Proc. of ASCE, ST 5, 1971.
- 4) Livesley, R.K. : Matrix Method of Structural Analysis, Pergamon Press, London, pp. 247~252, 1969.
- 5) Livesley, R.K. : Automatic Design of Guyed Masts Subject to Deflection Constraints, Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 2, No. 1, 1970.
- 6) 前田・林・中村 : 増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, No. 223, 1974.
- 7) Maeda, Y., Hayashi, M. and Maeda, K. : Large Deformation Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges, Tech. Rep. of Osaka Univ., Vol. 24, No. 1183, 1974.
- 8) 前田・林・前田 : 大径間斜張橋の非線形性状について, 土木学会第 27 回年次学術講演会概要集, 1972.

(1976.4.17・受付)